

BREVI ELEMENTI
DI CALCOLO DIFFERENZIALE
DI
GAETANO ALLODI

AGGIUNTO
AL R. OSSERVATORIO DI MILANO.



IN MILANO)o(MDCCLXXXIV.



Appreſſo Giuſeppe Galeazzi Regio Stampatore.
Con Approvazione.



A SUA ECCELLENZA

GIO. GIUSEPPE

DEL SACRO ROMANO IMPERO

CONTE DE WILZECK

BARONE DE HULTSCHIN
E GUTTELAND
GENTILUOMO DI CAMERA
E CONSIG. INTIMO ATTUALE DI STATO
DI S. M. I. R. APOSTOLICA
GENERALE SOVRAINTENDENTE
E GIUDICE SUPREMO
DELLE REGIE POSTE
MINISTRO PLENIPOTENZIARIO
DELLA MAESTA' SUA
PRESSO IL GOVERNO GENERALE
DELLA LOMBARDIA AUSTRIACA
E COMMISSARIO PLENIPOTENZIARIO
IMPERIALE IN ITALIA ec. ec.

ECCELLENZA.



Felici progreſſi che l' E. V. inceſſantemente procura alle Scienze ed alle belle Arti, di cui è ſpecial protettore

e fautor ſingolariſſimo, mi danno animo a ſperare, che l'E. V. ſi degnerà accogliere favorevolmente queſto piccol libro ed onorarlo di ſua protezione: In eſſo ho io procurato, componendolo, di ſtendere con chiarezza e preciſione quella parte dell' Analiſi infinita, che al Calcolo Differenziale appartiene; e nell' offerirne all' E. V. il tenue omaggio, ho il bene di unire la mia alla univerſale venerazione, colla quale vengono riguardate le ſue virtù, e di dare un oſſequioſo atteſtato di que' ſinceri ſentimenti di alta ſtima e di profondo riſpetto, con cui mi proteſto

Dell' E. V.

Umilmo, divotmo, obbligmo ſervidore
GAETANO ALLODI.

A CHI LEGGE.

L'Operetta, che ora vi presento o cortese Lettore, contiene gli elementi del Calcolo Differenziale: Essa non vi suppone affatto novizio nelle Matematiche, ma richiede in voi una sufficiente cognizione dell' Algebra finita, della Geometria elementare, e delle sezioni del Cono. Lo scopo mio in questi brevi elementi si è di addestrarvi nelle regole, e nelle applicazioni del Calcolo Differenziale, e di appianarvi la strada per cui giugner possiate allo studio importantissimo del Calcolo Integrale, del Calcolo delle Variazioni e delle teorie più subblimi, ed interessanti dell' infinita Analisi.

INDICE DE' CAPI.

CAPO PRIMO.

Nozioni e Regole del Calcolo Differenziale nelle quantità e funzioni (*) algebriche.

I.

Quantità variabile si dice quella che in un dato problema si cambia al cambiarsi di qualche dato, e *quantità costante* quella che conserva sempre lo stesso valore, qualunque cambiamento accada nei dati dello stesso problema. Per esempio in una data sezione conica riferita ad un dato diametro a tutte le successive ascisse corrispondono delle ordinate, degli archi, degli spazj di diverso valore, e viceversa: Dunque tutte queste funzioni nella sezione sono quantità variabili. All' opposto il parametro della stessa sezione è una quantità costante, poichè variando le ascisse, le ordinate, gli archi, gli spazj ec., esso non cambia valore.

II.

Quantità, *o grandezza finita* è quella di cui se ne possono assegnare delle altre omogenee maggiori e minori. Da questa ne derivano le altre due *l' infinita*, *e l' infinitamente piccola*. Se una quantità finita può concepirsi ingrandita senza fine ed oltre ogni dato termine, essa si chiama *infinita*. Se la medesima quantità finita può concepirsi oltre ogni termine impiccolita essa si dice *infinitamente piccola*.

(*) Col nome di funzione d'una quantità s' intende una qualunque algebrica espressione, in cui quella quantità entra di qualsisia maniera.

III.

Quindi 1.° Le quantità infinite ed infinitamente piccole sono quelle che si suppongono astrattamente, ed indefinitamente maggiori, o minori d'ogn' altra quantità finita omogenea. 2.° Esse quantità infinite ed infinitamente piccole sono perciò inassegnabili da veruna quantità finita e determinata.

IV.

Ciò posto sia dx una quantità infinitamente piccola ed omogenea alla variabile finita x, e s'intenda che x diventi $x+dx$, ovvero $x-dx$. La quantità infinitamente piccola dx, di cui la variabile x si suppone accresciuta o diminuita, si chiama *Differenziale*, *Flussione*, od *Elemento infinitesimo* di x. La lettera d che precede la x quì non dinota una quantità che moltiplica la x, ma il differenziale della stessa x.

Secondo questa diffinizione il differenziale d'una quantità variabile non è che *la differenza tra lo stato della stessa variabile avanti un cambiamento infinitamente piccolo*, *ed il di lei stato dopo questo cambiamento*.

V.

Nel calcolo delle quantità infinitamente piccole si distinguono differenti ordini di differenziali. Si chiama *Differenziale di 1.° ordine* quello che abbiamo or ora diffinito, cioè la flussione d'ogni quantità variabile: *Differenziale di 2.° ordine* la flussione di questo primo differenziale considerato ancor esso come quantità variabile: *Differenziale di 3.° ordine* la flussione di un differenziale di 2.°, e così di seguito.

Le quantità costanti d'ordinario si esprimono colle prime lettere dell' alfabeto, e le variabili colle ultime. Il

differenziale di 1.° ordine si dinota, come si è detto, colla lettera iniziale *d* scritta alla sinistra della variabile; il differenziale di 2.° ordine colle due lettere *dd*, oppure colla sola cifra d^2 scritta allo stesso sito; il differenziale di 3.° ordine colle tre lettere *ddd*, o più brevemente colla cifra d^3 ec. Noi dunque in progresso non altrimenti ci serviremo delle lettere d^1, d^2, d^3 ec. che per caratteristiche dei differenziali di 1.°, 2.°, 3.°, ... ec. ordine delle quantità variabili, di sorte che, se x esprimerà una variabile finita, dx ci indicherà il di lei differenziale di 1.° ordine, d^2x quello di 2.° ordine, d^3x quello di 3.°, e in generale il differenziale di ordine m.esimo della quantità x si esprimerà per d^mx. Solo si avverta che ciascuno di questi differenziali deve scriversi col segno positivo se per esso cresce la variabile, e col negativo se la variabile decresce.

La quantità costante non essendo soggetta a veruna variazione, benchè infinitesima di qualsisia ordine, non ha differenziale di veruna sorte; cioè qualunque suo differenziale è eguale a zero.

VI.

Per poco che si rifletta sulle quantità infinitesime di ordine superiore si capisce facilmente che un' infinitesima di 2.° ordine deve essere rispetto ad una di 1.° ciò che una di 1.° è rispetto alla quantità finita, ovvero all' unità, che un' infinitesima di 3.° ordine è rispetto ad una di 1.° ciò che una di 2.° è rispetto alla quantità finita, e così delle altre. Quindi data una quantità infinitamente piccola sarà facile il conoscere l'ordine infinitesimo a cui essa appartiene. Per esempio $dxdy$ è infinitesima di 2.° ordine, poichè $dxdy : dx :: dy : 1$; $dxdydz$ è di 3.°, poichè $dxdydz : dx :: dydz : 1$ ec.

Dunque il prodotto di 2, di 3, di 4, ec. quantità infiniteſime di primo ordine è un' infiniteſima di 2.°, di 3.°, di 4.° ec. ordine riſpetto alla quantità finita od all' unità.

Allo ſteſſo modo ſi dimoſtra che il quadrato, il cubo, e in generale la potenza m.^{esima} del differenziale dx è un' infiniteſima di 2.°, di 3.°, ... di m.^{esimo} ordine: Queſte potenze di dx ſi ſcrivono d' ordinario in queſto modo dx^2, dx^3, ... dx^m. Conviene però oſſervare a non confondere queſte potenze di dx co' Differenziali di 1.° ordine delle varie potenze di x, cioè co' Differenziali di x^2, x^3, ... x^m, i quali, a ſcanſo d' ogni equivoco, ſi poſſono ſcrivere così $d(x^2)$, $d(x^3)$, ... $d(x^m)$.

VII.

Calcolo Infiniteſimale ſi chiama l'analiſi, ovvero il modo di calcolare tutte le predette quantità infinitamente piccole. Sua prima parte è il *Calcolo Differenziale*, chiamato altrimenti *Metodo diretto delle fluſſioni*, perchè inſegna a ritrovare i differenziali di ogni ordine per le varie funzioni di una o più variabili. La ſeconda parte ſi chiama *Calcolo Integrale*, *o Metodo inverſo delle fluſſioni*, e conſiſte nel regreſſo del Calcolo differenziale, ovvero nel metodo di ritrovare la funzione a cui appartiene un dato differenziale.

Il principio a cui le regole di queſti due Calcoli ſono appoggiate è il ſeguente:

VIII.

Se due quantità finite, ed in ſe determinate non differiſcono tra loro che di qualche quantità infinitamente piccola eſſe ſi devono aſſumere per eguali. Poichè egli è evidente che ſe due quantità finite omogenee non foſſero eguali, ma aveſ-

fero tra loro alcuna differenza, questa sarebbe finita. Dunque se tra due quantità finite omogenee non passa una differenza finita, quelle due quantità sono tra loro eguali; cioè se la supposta differenza è infinitamente piccola, le due quantità finite sono rigorosamente eguali tra loro. Parimente devono assumersi per eguali due quantità infinitesime di qualsisia ordine quando non differiscono che di qualche infinitesima di ordine superiore. Cioè le quantità infinitesime di ogni ordine devono sempre disprezzarsi nel calcolo quando ritrovansi unite co' segni $+$ o $-$ a quantità finite od infinitamente piccole di ordine inferiore.

IX.

PROBLEMA. 1.° *Cercare il Differenziale della somma o della differenza di più quantità semplici variabili, e costanti*

Sia proposta la funzione $x+y-z+a-b$, nella quale x, y, z sono quantità variabili, ed a, b quantità costanti

La quantità x dopo di avere variato d'una porzione infinitamente piccola si muta in $x+dx$, la y in $y+dy$, la z in $z+dz$, le quantità a, b non possono variare perchè sono costanti, e la funzione data si muta in $x+dx+y+dy-z-dz+a-b$. Il differenziale d'una data funzione è la differenza tra lo stato della medesima avanti un cambiamento infinitamente piccolo, ed il di lei stato dopo questo cambiamento (IV.): dunque il differenziale cercato sarà la differenza tra $x+y-z+a-b$, ed $x+dx+y+dy-z-dz+a-b$, così esso sarà $dx+dy-dz$.

X.

COROLLARIO. 1.° *Quindi per avere il Differenziale della somma, o della differenza di più quantità semplici*

variabili, e costanti si uniranno insieme i differenziali delle sole variabili co' loro proprj segni.

XI.

COROLLARIO 2.° Tutte le quantità costanti aggiunte o levate da una funzione di quantità variabili non mutano il di lei differenziale; poichè $dx+dy-dz$ è il differenziale non meno di $x+y-z$, che di $x+y-z+a-b$. Dunque se due o più funzioni non differiscono tra loro che di quantità costanti, comunque aggiunte o sottratte, avranno uno stesso differenziale.

XII.

PROBLEMA 2.° *Cercare il Differenziale del prodotto di più quantità variabili, e costanti.*

Sia primieramente il prodotto ax d'una variabile x, e d'una costante a. Per ritrovare il suo differenziale si rifletta che x dopo un cambiamento infinitamente piccolo diventa $x+dx$, ed il suo prodotto con a si cambia in $ax + adx$; dunque tolto da questo prodotto il dato ax, il ressiduo adx sarà il differenziale cercato di ax.

Sia in 2.° luogo il prodotto xy di due variabili. Dopo un cambiamento infinitamente piccolo x si cambia in $x+dx$, y in $y+dy$, ed il prodotto loro xy in $(x+dx).(y+dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Dunque l'eccesso del prodotto $xy + xdy + ydx + dxdy$ sopra xy, cioè $xdy + ydx + dxdy$ sarà il differenziale di xy, e trascurando la quantità infinitesima di 2.° ordine $dxdy$, la quale svanisce in confronto delle altre, sarà il medesimo differenziale $xdy+ydx$.

Sia inoltre il prodotto xyz di tre variabili. Dopo il solito cambiamento sopravvenuto in ciascuna variabile, il

prodotto xyz si cambia in $(x+dx).(y+dy).(z+dz) = xyz + yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$. Dunque tolto xyz da questo prodotto, e trascurati tutti i termini di ordine inferiore, si avrà $xydz + xzdy + yzdx$ pel differenziale di xyz.

Allo stesso modo operando si trova $d(xyzv) = xyzdv + xyvdz + xzvdy + yzvdx$ (*).

XIII.

Corollario 1.° Da tutte queste funzioni differenziate si ricava generalmente, che *il Differenziale del prodotto di più quantità variabili, e costanti si trova moltiplicando il differenziale di ciascuna variabile pel prodotto di tutte le altre quantità variabili, e costanti, e sommando insieme tutti i prodotti.*

XIV.

Corollario 2.° Con questa regola si ha

$d(\overline{x+a}).\overline{y+b} = (x+a).d(y+b) + (y+b).d(x+a)$;

ma $(x+a).d(y+b) = (x+a).dy = xdy + ady$,

ed $(y+b).d(x+a) = (y+b).dx = ydx + bdx$

(*) Trovato il differenziale del prodotto di due variabili xy, i differenziali degli altri prodotti xyz, $xyzv$ si possono ottenere con semplici sostituzioni. Cerchisi per esempio il differenziale di xyz: posto $xy = p$ si avrà $xyz = pz$, e $d(xyz) = d(pz)$; ma pel caso delle due variabili deve essere $d(pz) = pdz + zdp$: dunque sarà $d(xyz) = pdz + zdp$, ed essendo parimente $dp = d(xy) = xdy + ydx$ sarà $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.
Similmente richiamato il prodotto $xyzv$ alla forma pv coll' eguagliare xyz a p si avrà $d(xyzv) = d(pv) = pdv + vdp$; ma $dp = d(xyz) =$ (pel caso precedente) $xydz + xzdy + yzdx$. Dunque sarà $d(xyzv) = xyzdv + xyvdz + xzvdy + yzvdx$.

Dunque $d(\overline{x+a}\ .\ \overline{y+b}) = xdy + ady + ydx + bdx$

$d(xy.\overline{z+v}) = d(zyz + xyv) = d(xyz) + d(xyv) = xydz + xzdy + yzdx + xydv + xvdy + yvdx$.

XV.

PROBLEMA. 3.° *Cercare il Differenziale di un quoto, o di una frazione i cui termini sono variabili.*

Sia questa frazione $\frac{x}{y}$

Si sostituisca $x + dx$ ad x, ed $y + dy$ ad y; si avrà la frazione trasformata $\frac{x+dx}{y+dy}$. Ma dall' attuale divisione si ha $\frac{x+dx}{y+dy} = \frac{x}{y} + \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} - \frac{dxdy}{y^2} + \frac{xdy^2}{y^3} + \dots$ ec. Dunque questa serie è lo stato di $\frac{x}{y}$ dopo un cambiamento infinitamente piccolo, e però il differenziale cercato sarà questa serie sminuita di $\frac{x}{y}$, e delle inutili quantità infinitesime d'ordine superiore; cioè esso sarà $\frac{dx}{dy} - \frac{xdy}{y^2}$, ossia ridotti i termini al medesimo denominatore, $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ (*).

Co-

(*) Questo differenziale si ottiene ancora col mezzo d'una sostituzione. Si faccia $\frac{x}{y} = z$; sarà $x = zy$, $d(\frac{x}{y}) = dz$, e $dx = zdy + ydz$; onde $dz = \frac{dx - zdy}{y}$, cioè rimettendo $\frac{x}{y}$ in luogo di z, $dz = \frac{dx - \frac{xdy}{y}}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Dunque $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

XVI.

COROLLARIO 1.° Quindi *per differenziare un quoto od una frazione, i cui termini sono variabili, si moltiplichi il differenziale del numeratore pel denominatore, ed il differenziale del denominatore pel numeratore, si sottragga questo secondo prodotto dal primo, e si divida il residuo pel quadrato del denominatore.*

XVII.

COROLLARIO. 2.° Il differenziale di $\frac{x}{a}$ è $\frac{dx}{a}$, e quello di $\frac{a}{x}$ è $-\frac{adx}{x^2}$: poichè, posto $da = o$, si ha $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - xda}{a^2} = \frac{adx}{a^2} = \frac{dx}{a}$, e $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{xda - adx}{x^2} = -\frac{adx}{x^2}$. Dunque le costanti, per cui sono o moltiplicati o divisi i termini di una frazione variabile, punto non alterano le regole di differenziare, rimanendo esse ne' differenziali quali erano nella frazione prima di differenziarsi.

XVIII.

COROLLARIO 3.° Della regola generale stabilita si ha

$$d\left(\frac{xy}{z}\right) = \frac{z\,d(xy) - xydz}{z^2} = \frac{xzdy + yzdx - xydz}{z^2}.$$

$$d\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \frac{(x-a).d(x+a) - (x+a).d(x-a)}{(x-a)^2} = -\frac{2adx}{(x-a)^2}.$$

$$d\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{(x-y).d(x+y) - (x+y).d(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2}.$$

XIX.

PROBLEMA. 4.° *Cercare il differenziale di una varia-*

bile x *elevata ad una potenza di qualunque esponente* m *positivo, negativo, intero, o fratto.*

Alla variabile x sostituito $x + dx$, invece di x^m si avrà la trasformata potenza $(x + dx)^m$. Ma per la notissima formola del binomio $(x + dx)^m = x^m + mx^{m-1} dx + \frac{m.\overline{m-1}}{2} x^{m-2} dx^2 + \frac{m.\overline{m-1}\,\overline{m-2}}{2.3} x^{m-3} dx^3 + \ldots\ldots$ ec. Dunque sottratto x^m da questa serie, e negligentati tutti i termini in cui dx è inalzata a qualche grado di potenza, perchè evanescenti in confronto di $mx^{m-1}dx$, rimarrà questo sol termine pel richiesto differenziale di x^m; cioè sarà

$d(x^m) = mx^{m-1} dx$. (*)

(*) Questo differenziale si ritrova ancora senza far uso del binomio nel modo seguente.

Sia l'esponente m un numero intero positivo. La potenza x^m altro non sarà che il prodotto di tante x quante unità sono in m, cioè essa sarà il prodotto di altrettante $x, y, z, u, \ldots\ldots$ ec. tutte eguali tra loro. Onde se m avrà alcuno tra i valori interi positivi $2; 3; 4; 5; \ldots\ldots$ ec.

Sarà $x^m = x^2 = xy$.

$x^m = x^3 = xyz$.

$x^m = x^4 = xzyv$.

ec.

Ora (XII) $d(xy) = xdy + ydx$.

$d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

$d(xyzv) = xyzdv + xyvdz + xzvdy + yzvdx$.

Dunque per essere $x = y = z = u =$ ec.

Sarà $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$.

$d(x^3) = x^2 dx + x^2 dx + x^2 dx = 3x^2 dx$.

$d(x^4) = x^3 dx + x^3 dx + x^3 dx + x^3 dx = 4x^3 dx$.

ec.

E in generale $d(x^m) = mx^{m-1} dx$.

Sia m un numero intero negativo espresso generalmente da $-n$. Posto $x^{-n} = y$, sarà $\frac{1}{x^n} = y$, ed $1 = yx^n$; onde differenziando si avrà $o = x^n dy + nyx^{n-1} dx$, poichè n è numero intero positivo: dun-

XX.

Corollario 1.° *Quindi ad avere il differenziale di una variabile inalzata ad una potenza di qualſivoglia eſponente negativo, intiero, o fratto, ſi diminuiſca queſto ſuo eſponente di un unità, cioè ſi abbaſſi di un grado la potenza della variabile, e ſi moltiplichi queſta nuova potenza pel primo eſponente, e pel differenziale della variabile preſa ſemplicemente.*

XXI.

Corollario 2.° Con queſta regola ſi ottengono i ſeguenti differenziali

$$d(x^m y^n) = y^n d(x^m) + x^m d(y^n) = my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy.$$

---

que $dy = \frac{-nyx^{n-1}dx}{x^n}$; cioè per eſſere $y = x^{-n}$, e $dy = d(x^{-n})$, ſarà $d(x^{-n}) = -nx^{-n-1}dx$.

Sia m una frazione poſitiva eſpreſſa generalmente da $\frac{n}{r}$.
Poſto $x^{\frac{n}{r}} = y$, ſarà $x^n = y^r$; ma n ed r ſono numeri interi poſitivi; dunque differenziando avraſſi $nx^{n-1}dx = ry^{r-1}dy$, e $dy = \frac{nx^{n-1}dx}{ry^{r-1}}$; cioè per eſſere $y = x^{\frac{n}{r}}$, $dy = d(x^{\frac{n}{r}})$, ed $y^{r-1} = \frac{x^n}{y}$, ſarà

$$d(x^{\frac{n}{r}}) = \frac{nx^{\frac{n}{r}}x^{n-1}dx}{rx^n} = \frac{n}{r}x^{\frac{n}{r}-1}dx.$$

Finalmente ſia m una frazione negativa eſpreſſa da $-\frac{n}{r}$.
Poſto $x^{-\frac{n}{r}} = y$ ſarà $1 = y^r x^n$, onde per eſſere n, r numeri interi poſitivi, differenziando ſi avrà $0 = rx^n y^{r-1}dy + ny^r x^{n-1}dx$, e $dy = -\frac{n}{r}yx^{-1}dx$.
Ma $y = x^{-\frac{n}{r}}$, e $dy = d(x^{-\frac{n}{r}})$. Dunque rimettendo queſti valori, ſi avrà

$$d(x^{-\frac{n}{r}}) = -\frac{n}{r}x^{-\frac{n}{r}-1}dx.$$

$$d\left(\frac{x^m}{y^n}\right) = \frac{y^n d(x^m) - x^m d(y^n)}{y^{2n}} = \frac{mx^{m-1}dx}{y^n} - \frac{nx^m dy}{y^{n+1}}.$$

$$d(x^m+a)^n = n(x^m+a)^{n-1} d(x^m+a) = mn(x^m+a)^{n-1} x^{m-1} dx.$$

$$d\sqrt[n]{(x^r+a)^m} = d(x^r+a)^{\frac{m}{n}} = \tfrac{m}{n}(x^r+a)^{\frac{m}{n}-1} d(x^r+a)$$

$$= \tfrac{mr}{n}(x^r+a)^{\frac{m}{n}-1} x^{r-1} dx. \ (*)$$

(*) Il differenziale della frazione $\frac{x}{y}$, che al problema terzo si è ritrovato col mezzo della divisione, ed alla nota allo stesso problema con una sostituzione, si ottiene anche più facilmente colla presente regola generale: poichè $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, e $d(xy^{-1}) = y^{-1}dx + xd(y^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy$ $\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.



CAPO SECONDO.

DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI LOGARITMICHE, E CIRCOLARI.

XXII.

LEMMA. *Ogni numero può essere rappresentato da* $1 + x$, *ed il suo logaritmo dalla formola*
$log.(1+x) = A\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - ec.\right)$, *in cui* A *è il modulo del sistema logaritmico*.

La prima parte della proposizione è per se manifesta. Per la seconda parte si faccia $(1+x)^m = 1 + z$, $\log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ ec., e $\log.(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$ ec.: le quantità A, B, C, ec. sono a determinarsi col noto metodo de' coefficienti indeterminati. Però si riduca la prima di queste tre equazioni ai logaritmi, facendo $m \log.(1+x) = \log.(1+z)$; si moltiplichi la seconda per m, e si eguaglj il prodotto alla terza equazione. Si avrà $mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + \ldots$ ec. $= Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$ ec.

In questa equazione si sostituisca il valore di z dedotto dalla prima, cioè $z = (1+x)^m - 1 =$ (riducendo $\overline{1+x}^m$ in serie) $mx + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}x^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}x^3 +$ ec. Si avrà $mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + \ldots$ ec. $=$

$$mAx + \left.\begin{matrix} \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}A \\ m^2 B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}A \\ m^2.\overline{m-1}\;B \\ m^3\;C \end{matrix}\right\} x^3$$

$$+\left.\begin{array}{r} \dfrac{m\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,A \\ \dfrac{m^2\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{3}\,B \\ \dfrac{m^2\,.\,\overline{m-1}^2}{4}\,B \\ \dfrac{3m^3\,.\,\overline{m-1}}{2}\,C \\ m^4\,D \end{array}\right\} x^4 + \text{ec.}$$

Il coefficiente di ciascuna potenza di x nel primo membro si supponga eguale al coefficiente della stessa potenza di x nell' altro membro; cioè si formino queste equazioni.

$$mB = \frac{m\,.\,\overline{m-1}}{2}\,A + m^2\,B.$$

$$mC = \frac{m\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{6}\,A + m^2\,.\,\overline{m-1}\;B + m^3\;C.$$

$$mD = \frac{m\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{24}\,A + \frac{m^2\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{3}\,B + \frac{m^2\,.\,\overline{m-1}^2}{4}\,C + \frac{3m^3\,.\,\overline{m-1}}{2}\,C + m^4\,D.$$

$mE =$ ec.

Dalla prima equazione si ha $B = -\frac{1}{2}A$. Questo valore di B sostituito nella seconda dà $C = \frac{1}{3}A$. I valori di B, C posti nell' equazione seguente, danno quello di $D = -\frac{1}{4}A$. Continuando a sostituire i valori trovati nelle altre equazioni si trova $E = \frac{1}{5}A$, $F = -\frac{1}{6}A$,... ec.

Finalmente sostituendo questi valori alle stesse quantità B, C, D, ec. nella seconda equazione $\log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ ec., si avrà $\log.(1+x) = Ax - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 + \frac{1}{5}Ax^5 - \ldots$ ec. $= A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$ ec.$)$

XXIII.

PROBLEMA 1.° *Cercare il differenziale di una quantità logaritmica y.*

Si faccia log. $y = z$, e si supponga che y, z diventino $y + dy$, $z + dz$. Sarà log. $(y + dy) = z + dz$; onde $dz = \log.(y + dy) - z = \log.(y + dy) - \log. y = \log.\left(\frac{y + dy}{y}\right) = \log.\left(1 + \frac{dy}{y}\right)$. Dunque pel lemma precedente, scrivendo $\frac{dy}{y}$ invece di x, si avrà log. $\left(1 + \frac{dy}{y}\right)$ ossia $dz = A\left(\frac{dy}{y} - \frac{dy^2}{2y^2} + \frac{dy^3}{3y^3} - \ldots ec.\right) =$ (ommessi tutti i termini infinitesimi di ordine superiore) $\frac{Ady}{y}$. Cioè d (log. y) $= \frac{Ady}{y}$, ovvero, se il logaritmo di y s' intenderà iperbolico, in cui $A = 1$, sarà $d\,(\log. y) = \frac{dy}{y}$.

XXIV.

COROLLARIO 1.° *Quindi il differenziale del logaritmo di una quantità variabile si trova dividendo il differenziale della quantità per la quantità stessa, e moltiplicando il quoziente pel modulo del dato logaritmo.*

XXV.

COROLLARIO 2.° Col mezzo di questa regola si hanno questi differenziali, supponendo i logaritmi iperbolici.
d (l. ax) $= \frac{adx}{ax} = \frac{dx}{x}$; ovvero, per essere l. ax $=$ l. $a +$ l. x, sarà d (l. ax) $= d$ (l. $a +$ l. x) $= \frac{dx}{x}$.

$$d\,(\,\mathrm{l}.\,xy\,) = \frac{ydx + xdy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}, \text{ ovvero } d\,(\mathrm{l}.\,xy) = d\,(\mathrm{l}.\,x + \mathrm{l}.\,y\,)$$
$$= \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{ydx + xdy}{xy}.$$

$$d\left(\mathrm{l}.\,\frac{x}{y}\right) = d\,(\,\mathrm{l}.\,x - \mathrm{l}.\,y\,) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{xy}.$$

$$d\,(\,\mathrm{l}.\,x^m) = \frac{mx^{m-1}\,dx}{x^m} = \frac{mdx}{x} \text{ ovvero } d\,(\,\mathrm{l}.\,x^m\,) = d\,(\,m\,\mathrm{l}.\,x\,)$$
$$= \frac{mdx}{x}.$$

$$d\,(\,\mathrm{l}.\,x^m\,)^n = d\,(\,m\,\mathrm{l}.\,x\,)^n = n\,(\,m\,\mathrm{l}.\,x\,)^{n-1}\,\frac{mdx}{x} = mn\,(\,\mathrm{l}.\,x^m)^{n-1}\,\frac{dx}{x}.$$

$$d\left(\,\mathrm{l}.\,\frac{a+x}{a-x}\,\right) = d\left(\,\mathrm{l}.\,\overline{a+x} - \mathrm{l}.\,\overline{a-x}\,\right) = \frac{dx}{a+x} +$$
$$\frac{dx}{a-x} = \frac{2adx}{a^2 - x^2}.$$

$$d\left(\,\mathrm{l}.\,\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) = d\left(\mathrm{l}.\,x - \mathrm{l}.\,\sqrt{x^2+b^2}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{xdx\,(\,x^2+b^2\,)^{-\frac{1}{2}}}{(\,x^2+b^2\,)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{x^2+b^2} = \frac{b^2\,dx}{x^3 + b^2\,x}.$$

XXVI.

CORLLARIO 3.° La medesima regola serve a determinare il differenziale di un logaritmo di logaritmo, cioè delle quantità $\mathrm{l.\,l.}\,x$; $\mathrm{l.\,l.\,l.}\,x$; $\mathrm{l.\,l.\,l.\,l.}\,x$; ec. in cui ciascuna l. significa logaritmo. Imperocchè, posto $\mathrm{l.}\,x = y$; e però $dy = \frac{dx}{x}$, si avrà

$$d\,(\mathrm{l.\,l.}\,x) = d\,(\,\mathrm{l.}\,y) = \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\,\mathrm{l.}\,x}.$$

$$d\,(\,\mathrm{l.\,l.\,l.}\,x\,) = d\,(\mathrm{l.\,l.}\,y\,) = \frac{dy}{y\,\mathrm{l.}\,y} = \frac{dx}{x\,\mathrm{l.}\,x\;\mathrm{l.\,l.}\,x}.$$

$$d\,(\mathrm{l.\,l.\,l.\,l.}\,x) = d\,(\mathrm{l.\,l.\,l.}\,y) = \frac{dy}{y\;\mathrm{l.}\,y\;\mathrm{l.\,l.}\,y} = \frac{dx}{x\,\mathrm{l.}\,x\;\mathrm{l.\,l.}\,x\;\mathrm{l.\,l.\,l.}\,x}.$$

e in generale $d(\text{l.}^m x) = \frac{dx}{x\,\text{l.}x\;\text{l.}^2 x\;\text{l.}^3 x \ldots \text{l.}^{m-1} x}$, indicando per $\text{l.}^2, \text{l.}^3, \ldots \text{l}^m$ il logaritmo di 2.°, di 3.° ..... di m.^{esimo} ordine.

XXVII.

Corollario 4.° Dall' equazione $d(\log. x) = \frac{dx}{x}$ si ha $x\,d(\log. x) = dx$. Dunque *il differenziale di una quantità qualunque variabile è eguale alla quantità stessa moltiplicata pel differenziale del suo logaritmo.*

Con questa sola regola si possono determinare tutti i differenziali ritrovati nel capo precedente con altrettanti metodi particolari: poichè

1.° $d(xy) = xyd(\text{l.}\,xy) = xy\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) = ydx + xdy.$

2.° $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\;d\left(\text{l.}\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$

3.° $d(x^m) = x^m d(\text{l.}\,x^m) = x^m d(m.\,\text{l.}\,x) = x^m\left(\frac{mdx}{x}\right) = mx^{m-1}dx.$

XXVIII.

Problema 2.° *Cercare il differenziale di una quantità esponenziale, cioè di una potenza il cui esponente sia variabile.*

Sia primieramente a^x. Si faccia $a^x = y$; sarà $x\,\text{l.}\,a = \text{l.}\,y$, $d(a^x) = dy$, $\text{l.}\,adx\;\frac{dy}{y}$; onde $dy = y\,\text{l.}\,adx$; cioè sostituendo i valori di y e dy, sarà $d(a^x) = a^x\,\text{l.}\,adx$.

Sia x^y. Posto $x^y = z$; sarà $y\,\mathrm{l}.x = \mathrm{l}.z$, $d(x^y) = dz$, $d(y\,\mathrm{l}.x) = \mathrm{l}.x dy + \frac{y dx}{x} = \frac{dz}{z}$, onde $dz = z\left(\mathrm{l}.x dy + \frac{y dx}{x}\right)$, cioè $d(x^y) = x^y\left(\mathrm{l}.x dy + \frac{y dx}{x}\right) = x^y\,\mathrm{l}.x dy + y x^{y-1} dx$.

Sia la quantità esponenziale di secondo ordine a^{x^y}. Posto $a^{x^y} = z$, sarà $d(a^{x^y}) = dz$, $x^y\,\mathrm{l}.a = \mathrm{l}.z$, $\frac{dz}{z} = \mathrm{l}.a\, d(x^y) =$ (caso precedente) $\mathrm{l}.a\,(x^y\,\mathrm{l}.x dy + y x^{y-1} dx)$, e $dz = z\,\mathrm{l}.a\,(x^y\,\mathrm{l}.x dy + y x^{y-1} dx) = a^{x^y}\,\mathrm{l}.a\,(x^y\,\mathrm{l}.x dy + y x^{y-1} dx)$.

Allo stesso modo si trova che il differenziale di x^{y^z} è $x^{y^z}(y^z x^{-1} dx + y^z\,\mathrm{l}.y\,\mathrm{l}.x dz + z y^{z-1}\,\mathrm{l}.x dy)$; poichè fatto $x^{y^z} = v$, si avrà $d(x^{y^z}) = dv$; $\mathrm{l}.v = y^z\,\mathrm{l}.x$; $\frac{dv}{v} = d(y^z\,\mathrm{l}.x)$ $= y^z d(\mathrm{l}.x) + \mathrm{l}.x\, d(y^z) = \frac{y^z dx}{x} + \mathrm{l}.x\,(y^z\,\mathrm{l}.y dz + z y^{z-1} dy)$; onde moltiplicando per v, e rimettendo per v, e dv i loro valori sarà dv, ossia $d(x^{y^z}) = x^{y^z}(y^z x^{-1} dx + y^z\,\mathrm{l}.y\,\mathrm{l}.x dz + z y^{z-1}\,\mathrm{l}.x dy)$.

Da questi differenziali si vede che quì pure ha luogo la regola stabilita nell' ultimo corollario del problema precedente; cioè *che il differenziale di ogni quantità o funzione composta comunque o di sole variabili, o di variabili e costanti è sempre eguale al prodotto della stessa quantità o funzione nel differenziale del suo logaritmo.*

XXIX.

PROBLEMA 3.° *Determinare il differenziale di una funzione circolare corrispondente ad un dato arco od angolo variabile* x.

Si sostituisca $x + dx$ in luogo di x. Si avrà

1.° Pel differenziale del Seno

$\text{Sen.}(x+dx) = \text{Sen.}\, x \,.\, \text{Cof.}\, dx + \text{Cof.}\, x \,.\, \text{Sen.}\, dx$, fuppofto il raggio $= 1$ (*). Ma fupponendo $\text{Cof.}\, dx =$ Raggio $= 1$, e $\text{Sen.}\, dx = dx$; cioè il cofeno di un arco infinitamente piccolo eguale al raggio, ed il di lui feno eguale all' arco ftesso (**), fi avrà $\text{Sen.}(x+dx) = \text{Sen.}\, x + \text{Cof.}\, x \,.\, dx$. Laonde crefcendo l' arco x della porzione infinitefima dx, il di lui feno crefce della quantità $\text{Cof.}\, x \,.\, dx$. Dunque $\text{Cof.}\, x \,.\, dx$ farà il differenziale del feno dell' arco x: Cioè *il differenziale del feno di un arco circolare, il cui raggio fi fuppone* $= 1$, *è eguale al differenziale dell' arco moltiplicato pel cofeno dell' arco fteffo.*

2.° Pel differenziale del Cofeno

$\text{Cof.}(x+dx) = \text{Cof.}\, x \,.\, \text{Cof.}\, dx - \text{Sen.}\, x \,.\, \text{Sen.}\, dx$, fatto il raggio $= 1$; fupponendo come fopra $\text{Cof.}\, dx = \text{Rag.} = 1$ e $\text{Sen.}\, dx = dx$, fi avrà $\text{Cof.}(x+dx) = \text{Cof.}\, x - \text{Sen.}\, x \,.\, dx$.

(*) Quefta e le altre formole che verrò efponendo intorno alle funzioni circolari fi trovano in ogni compendio di trigonometria piana. Siano a, b due archi di circolo, il cui raggio fi fuppone $= 1$:

Il feno della loro fomma farà	$\text{Sen.}\, a \,.\, \text{Cof.}\, b + \text{Cof.}\, a \,.\, \text{Sen.}\, b$.
Quello della loro differenza	$\text{Sen.}\, a \,.\, \text{Cof.}\, b - \text{Cof.}\, a \,.\, \text{Sen.}\, b$.
Il cofeno della fomma de' med. archi.	$\text{Cof.}\, a \,.\, \text{Cof.}\, b - \text{Sen.}\, a \,.\, \text{Sen.}\, b$.
Quello della Differenza	$\text{Cof.}\, a \,.\, \text{Cof.}\, b + \text{Sen.}\, a \,.\, \text{Sen.}\, b$.

La tangente dell' arco a farà $= \frac{\text{Sen.}\, a}{\text{Cof.}\, a}$; poichè $\text{Cof.}\, a : 1 :: \text{Sen.}\, a : \text{Tang.}\, a$.

La Cotangente di a farà $= \frac{\text{Cof.}\, a}{\text{Sen.}\, a}$; poichè $\text{Sen.}\, a : \text{Cof.}\, a :: 1 : \text{Cot.}\, a$.

La Secante $= \frac{1}{\text{Cof.}\, a}$, e la Cofecante $= \frac{1}{\text{Sen.}\, a}$; poichè $\text{Cof.}\, a : 1 :: 1 : \text{Sec.}\, a$, e $\text{Sen.}\, a : 1 :: 1 : \text{Cofec.}\, a$ ec.

(**) Il cofeno di un arco zero è eguale al raggio: dunque il cofeno di un arco infinitefimo può fupporfi eguale al raggio. I feni degli archi piccoliffimi fi confondono cogli fteffi archi: Dunque ai feni degli archi infinitefimi fi pofsono foftituire gli archi fteffi, e viceverfa.

Onde crescendo l' arco x della porzione infinitesima dx, il di lui coseno decresce della quantità Sen. $x.dx$. Dunque — Sen. $x.dx$, sarà la flussione del coseno del medesimo arco: cioè *il differenziale del coseno di un arco è eguale al differenziale dell' arco moltiplicato pel seno dell' arco stesso*.

3.° Pel differenziale della Tangente, posto sempre il raggio $= 1$, si ha Tang. $x = \frac{\text{Sen. } x}{\text{Cos. } x}$. Dunque d (Tang. x) $= d\left(\frac{\text{Sen. } x}{\text{Cos. } x}\right) = \frac{\text{Cos. } x.\, d\,(\text{Sen. } x.) - \text{Sen. } x.\, d\,(\text{Cos. } x)}{\text{Cos.}^2 x} =$ $\frac{\text{Cos.}^2 x.\, dx + \text{Sen.}^2 x.\, dx}{\text{Cos.}^2 x} = \frac{dx}{\text{Cos.}^2 x}$ (Cos.$^2 x$ + Sen.$^2 x$). Ma Cos.$^2 x$ + Sen.$^2 x$ = (Rag.)$^2 = 1$. Dunque d(Tang. x) $= \frac{dx}{\text{Cos.}^2 x}$: cioè *il differenziale della Tangente di un arco circolare è eguale al differenziale dell' arco diviso pel quadrato del coseno dell' arco stesso*.

4.° Pel differenziale della Cotangente si ha Cotang. $x = \frac{\text{Cos. } x}{\text{Sen. } x}$. Dunque d (Cotang. x) $= d\left(\frac{\text{Cos. } x}{\text{Sen. } x}\right) =$ $\frac{\text{Sen. } x.\, d(\text{Cos. } x) - \text{Cos. } x.\, d(\text{Sen. } x)}{\text{Sen.}^2 . x} = \frac{-\text{Sen.}^2 x.\, dx - \text{Cos.}^2 x.\, dx}{\text{Sen.}^2 . x}$ $= \frac{-dx}{\text{Sen.}^2 x}$ (Sen.$^2 x$ + Cos.$^2 x$) $= - \frac{dx}{\text{Sen.}^2 x}$: cioè *il differenziale della Cotangente di un arco è eguale al differenziale negativo dell' arco diviso pel quadrato del seno dell' arco stesso*.

5.° Pel differenziale della Secante si ha Sec. $x = \frac{1}{\text{Cos. } x}$. Dunque d(Sec. x) $= d\left(\frac{1}{\text{Cos. } x}\right) = \frac{-d(\text{Cos. } x)}{\text{Cos.}^2 x} = \frac{\text{Sen. } x.\, dx}{\text{Cos.}^2 x}$: cioè *il differenziale della Secante di un arco è eguale al prodotto del differenziale dell' arco nel seno dell' arco stesso, diviso pel quadrato del coseno*.

6.° Pel differenziale della Cofecante, fi ha Cofec. $x = \frac{1}{\text{Sen.}\, x}$. Dunque $d\,(\text{Cofec.}\, x) = \left(\frac{1}{\text{Sen.}\, x}\right) = -\frac{d\ \text{Sen.}\, x}{\text{Sen.}^2\, x}\Big)$ $= -\frac{\text{Cof.}\, x \,.\, dx}{\text{Sen.}^2\, x}$: cioè *il differenziale della Cofecante di un arco è eguale al prodotto negativo del differenziale dell' arco nel cofeno dello fteffo arco, divifo pel quadrato del feno*.

XXX.

Corollario 1.° Dal differenziale di ciafcuna delle precedenti funzioni è facile il paffare a quello dell' arco x. Non fi ha che a fvolgere la dx da quel differenziale: così fi avrà 1.° $dx = \frac{d\,(\text{Sen.}\, x)}{\text{Cof.}\, x}$.

2.° $dx = -\frac{d\,(\text{Cof.}\, x)}{\text{Sen.}\, x}$.

3.° $dx = \text{Cof.}^2\, x \,.\, d\,(\text{Tang.}\, x)$.

4.° $dx = -\text{Sen.}^2\, x \,.\, d\,(\text{Cotang.}\, x)$.

5.° $dx = \frac{\text{Cof.}^2\, x \,.\, d\,(\text{Sec.}\, x)}{\text{Sen.}\, x}$.

6.° $dx = -\frac{\text{Sen.}^2\, x \,.\, d\,(\text{Cofec.}\, x)}{\text{Cof.}\, x}$.

XXXI.

Corollario 2.° Pofte tutte quefte formole differenziali. Sia y una funzione qualunque dell' arco circolare x; cioè

1.° Sia y il feno dell' arco x.

Sarà $dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$; poichè, fatto il raggio eguale all'unità, farà Cof. $x = \sqrt{1 - \text{Sen.}^2\, x}$, e foftituiti i valori nella prima formola del corollario precedente $dx = \frac{d\,.\,\text{Sen.}\, x}{\text{Cof.}\, x}$,

avraſſi la traſformata $dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$.

2.° Sia y il Coſeno dell' arco x; per la ſeconda formola dello ſteſſo corollario ſi avrà $dx = - \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$; poichè $\text{Sen.}\, x = \sqrt{1 - \text{Coſ.}^2 x}$.

3.° Sia y la tangente. Per la terza formola ſi avrà $dx = \frac{dy}{1 + y^2}$; poichè $\text{Coſ.}\, x = \frac{1}{\text{Sec.}\, x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Tang.}^2 x}}$.

4.° Sia y la Cotangente. Per la quarta formola ſi avrà $dx = - \frac{dy}{1 + y^2}$; poichè $\text{Sen.}\, x = \frac{1}{\text{Coſec.}\, x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Cot.}^2 x}}$.

5.° Sia y la Secante. Per la quinta formola ſi avrà $dx = \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}}$; poichè $\sqrt{\text{Sec.}^2 x - 1} = \text{Tang.}\, x = \text{Sec.}\, x . \text{Sen.}\, x$, e $\text{Coſ.}\, x = \frac{1}{\text{Sec.}\, x}$; onde $\text{Sen.}\, x = \frac{\sqrt{\text{Sec.}^2 x - 1}}{\text{Sec.}\, x}$, $\text{Coſ.}^2 x = \frac{1}{\text{Sec.}^2 x}$, e $\frac{\text{Coſ.}^2 x}{\text{Sen.}\, x} = \frac{1}{\text{Sec.}\, x . \sqrt{\text{Sec.}^2 x - 1}}$.

6.° Sia finalmente y la Coſecante. Per l'ultima formola dello ſteſſo corollario ſi avrà $dx = \frac{-dy}{y\sqrt{y^2 - 1}}$; poichè $\sqrt{\text{Coſec.}^2 x - 1} = \text{Cotang.}\, x = \text{Coſec.}\, x . \text{Coſ.}\, x$, e $\text{Sen.}\, x = \frac{1}{\text{Coſec.}\, x}$; onde $\text{Coſ.}\, x = \frac{\sqrt{\text{Coſec.}^2 x - 1}}{\text{Coſec.}\, x}$, $\text{Sen.}^2 x = \frac{1}{\text{Coſec.}^2 x}$, e $\frac{\text{Sen.}^2 x}{\text{Coſ.}\, x} = \frac{1}{\text{Coſec.}\, x . \sqrt{\text{Coſec.}^2 x - 1}}$.

CAPO TERZO.

Differenziali di ordine superiore.

XXXII.

I Differenziali di ordine ſuperiore ſi prendono come i differenzialii di 1.°

Sia X una funzione di x, ed $X'dx$ il ſuo differenziale di primo ordine, in cui X' è ancora una funzione di x.

Si differenzj $X'dx$ riguardandolo come il prodotto delle due variabili X', dx. Sarà $d(X'dx) = dxdX' + X'ddx$; e ſupponendo che il differenziale di X' ſia $X''dx$, in cui X'' eſprime una nuova funzione di x, ſarà $d(X'dx) = X''dx^2 + X'ddx$ il 2.° differenziale di X.

Si differenzj queſt' ultimo differenziale riguardando i due termini $X''dx^2$, e $X'ddx$ come due prodotti delle quattro variabili X'', dx^2, X', ddx.

Sarà $d(X''dx^2) = dx^2dX'' + 2X''dxddx$,

e $d(X'ddx) = X''dxddx + X'd^3x$.

Onde ſupponendo $dX'' = X'''dx$ ſi avrà $X'''dx^3 + 3X''dx\,ddx + X'd^3x$ pel differenziale di 3.° ordine della funzione finita X.

Continuando ad operare nella ſteſſa guiſa avraſſi il differenziale di 4.°, di 5.°, ec. ordine.

XXXIII.

Corollario. *Quindi ad avere un differenziale di ordine ſuperiore di una data funzione.*

1.° *Si prenda il differenziale di primo ordine della data funzione.*

2.° *Si prenda il differenziale di questa prima funzione considerando come altrettante variabili, e le variabili stesse, ed i loro differenziali: con che si avrà il differenziale di 2.° ordine della data funzione.*

3.° *Si differenzj questa seconda flussione, supponendo variabili le variabili stesse, i differenziali loro di 1.° ordine, e quelli di 2.°: ciò fatto, l' ottenuto differenziale sarà di 3.° ordine.*

Similmente operando si troveranno i differenziali di 4.°, 5.°, ec. ordine.

Esempio 1.° si cerchi il differenziale di secondo ordine di $x - y + a$.

Differenziando questa funzione si ha $dx - dy$, e differenziando questa prima differenza si ha $ddx - ddy$; dunque sarà $dd(x - y + a) = ddx - ddy$.

Esempio 2.° Vogliasi la seconda differenza di xy.

Si ha Differenza prima $d(xy) = xdy + ydx$.

Differenza seconda $d(xdy + ydx) = d(xdy) + d(ydx)$.

Ma $d(xdy) = xddy + dxdy$,

$d(ydx) = yddx + dxdy$.

Dunque $dd(xy) = xddy + yddx + 2dxdy$.

Esempio 3.° Sia proposto $dd(xyz)$.

Differenza prima $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

Differenza seconda $d(xydz + xzdy + yzdx) = d(xydz) + d(xzdy + d(yzdx)$.

Ma $d(xydz) = xyddz + xdzdy + ydzdx$,

$d(xzdy) = xzddy + xdzdy + zdydx$,

$d(yzdx) = yzddx + ydzdx + zdydx$.

Dunque $dd(xyz) = xyddz + xzddy + yzddx + 2xdzdy + 2ydzdx + 2zydx$.

Esem-

Esempio 4.° Sia $dd\left(\frac{x}{y}\right)$.

Differenza 1.ª $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Differenza 2.ª $d\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) = d\left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}\right) = d\left(\frac{dx}{y}\right)$
$- d\left(\frac{xdy}{y^2}\right)$.

Ma $d\left(\frac{dx}{y}\right) = \frac{yddx - dxdy}{y^2}$,

$d\left(\frac{xdy}{y^2}\right) = \frac{y^2 xddy + y^2 dxdy - 2xydy^2}{y^4}$

$= \frac{yxddy + ydxdy - 2xdy^2}{y^3}$.

Dunque $dd\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{yddx - dxdy}{y^2} - \frac{yxddy + ydxdy - 2xdy^2}{y^3}$

$= \frac{y^2 ddx - 2ydxdy + 2xdy^2 - yxddy}{y^3}$.

Esempio 5.° Sia $dd(x^m)$.

Differenza 1.ª $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Differenza 2.ª $d(mx^{m-1}dx) = mx^{m-1}ddx + m.\overline{m-1}\,x^{m-2}dx^2$.

Cioè $dd(x^m) = mx^{m-1}ddx + m.\overline{m-1}\,x^{m-2}dx^2$.

Se l'esponente m avesse qualunque valore, per esempio $m = \frac{n}{r}$, ponendo $\frac{n}{r}$ in luogo di m, avrebbesi

$dd\left(x^{\frac{n}{r}}\right)$, ossia $dd\sqrt[r]{x^n} = \frac{n}{r}\,x^{\frac{n}{r}-1}ddx +$

$\left(\frac{n}{r} - 1\right)\frac{n}{r}\;\; x^{\frac{n}{r}-2}dx^2$.

Esempio 6.° Sia ancora proposto $dd(a^x)$.

Differenza 1.ª $d(a^x) =$ (XXVIII.) a^x l. adx.

Differenza 2.ª $d(a^x \,\mathrm{l.}\, adx) = a^x d(\mathrm{l.}\, adx) + \mathrm{l.}\, adxd(a^x)$.
Ma $a^x d(\mathrm{l.}\, adx) = a^x \,\mathrm{l.}\, addx$,
$\mathrm{l.}\, adxd(a^x) = a^x (\mathrm{l.}\, a)^2 dx^2$.
Dunque $dd(a^x) = a^x \,\mathrm{l.}\, addx + a^x (\mathrm{l.}\, a)^2 dx^2$.

Esempio 7.° Vogliasi finalmente la terza differenza di xy
Sarà (Esempio 2.°) $dd(xy) = xddy + yddx + 2dxdy$.
E però differenza 3.ª $d(xddy + yddx + 2dxdy) = d(xddy) + d(yddx) + d(2dxdy)$.
Ora $d(xddy) = xd^3y + ddydx$,
$d(yddx) = yd^3x + ddxdy$,
$d(2dxdy) = 2dxddy + 2ddxdy$.
Dunque $d^3(xy) = xd^3y + ddydx + yd^3x + ddxdy + 2dxddy + 2ddxdy$.

XXXIV.

E' superfluo l' addurre altri esempj: i metodi generali che abbiamo insegnati bastano a determinare i differenziali di ciascun ordine per ogni funzione comunque composta di quantità algebriche e trascendenti. Soltanto si avverta che se in passando dalle prime alle superiori differenze, si prenderà per costante qualche differenza di 1.° ordine, le formole differenziali ricercate, saranno e più facili a determinarsi, e più semplici dell' ordinario. Si vogliano per esempio tutti i differenziali di x^m col supporre costante la differenza dx.

Sarà $dx^m = mx^{m-1}dx$.

$$d^2x^m = d(mx^{m-1}dx) = m.\overline{m-1}\,x^{m-2}dx^2;\ \text{poichè } ddx = 0.$$

$$d^3x^m = d(m.\overline{m-1}\,x^{m-2}dx^2) = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\,x^{m-3}dx^3.$$

$$d^4x^m = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}\,x^{m-4}dx^4.$$

E in generale $d^nx^m = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}dx^n$.

CAPO QUARTO.

Uso del Calcolo Differenziale nella formazione delle serie.

Sia x una variabile, ed y una qualunque ſua funzione. Per un numero indeterminato di volte ſi accreſca ciaſcuna di queſte due quantità del ſuo riſpettivo differenziale, riguardando ſempre come coſtante l' infiniteſima dx, e ſi prendano i diverſi ſtati di y per funzioni degli corriſpondenti di x; cioè ai valori $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, ec. ſi facciano corriſpondere ordinatamente le funzioni diſpoſte nella tavola ſeguente.

Valori aſſunti.	Funzioni corriſpondenti.
x	y
$x + dx$	$y + dy$
$x + 2dx$	$y + 2dy + ddy$
$x + 3dx$	$y + 3dy + 3ddy + d^3y$
$x + 4dx$	$y + 4dy + 6ddy + 4d^3y + d^4y$
$x + 5dx$	$y + 5dy + 10ddy + 10d^3\, 5d^4y + d^5y$
ec.	

Dall' andamento di queſte funzioni ſi vede chiaro, che tolto il 1.° termine y in ciaſcuna delle medeſime, i coeficienti numerici di dy ne' ſecondi termini ſono i numeri in ſerie naturale 0, 1, 3, 4, . . . ec., e che chiamando n ciaſcuno di queſti numeri i coeficienti de' termini in ciaſcuna di queſte funzioni ſono ſecondo queſta legge n, $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$, $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3.}$, $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4.}$. ec. (*)

(*) Queſti Coefficienti ſono quegli ſteſſi del Binomio Neutoniano.

Dunque in generale la funzione corrispondente al valore $x + ndx$ sarà $y + ndy + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} ddy + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} d^3y + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4} d^4y +$ ec.

Si chiami z quest' ultima funzione di $x + ndx$, e si assuma n infinita. I numeri finiti negativi -1, -2, -3, -4, ec. potranno trascurarsi in confronto di n, cioè a ciascun numero $n-1$, $n-2$, $n-2$, ec. potrà sostituirsi n, ed alla generale funzione di $x + ndx$ la trasformata $z = y + ndy + \frac{n^2 ddy}{1.2} + \frac{n^3 d^3y}{1.2.3} + \frac{n^4 d^4y}{1.2.3.4} +$ ec., in cui ciascun termine, oltre l'y, per essere il prodotto di due quantità l' una infinita, e l' altra infinitamente piccola dello stesso ordine, sarà quantità finita (*).

Facciasi in oltre la quantità finita $ndx = \varphi$, sarà $x + ndx = x + \varphi$, ed $n = \frac{\varphi}{dx}$. Questo valore di n sostituito nella trasformata equazione darà la nuova formola generale

$$z = y + \frac{\varphi dy}{dx} + \frac{\varphi^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\varphi^3 d^3y}{1.2.3\, dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4y}{1.2.3.4\, dx^4} + \text{ec.}$$

(*) Siccome n è quantità infinita sarà $n = \infty$; ma dy è una quantità infinitamente piccola, quale può riguardarsi come il quoto di una quantità finita qualunque h divisa per un infinita ∞: dunque sarà $dy = \frac{h}{\infty}$, $dy^2 = \frac{h^2}{\infty^2}$, $dy^3 = \frac{h^3}{\infty^3}$ ec., e quindi sostituendo avrassi $ndy = \infty . \frac{h}{\infty} = h$, $n^2 dy^2 = \infty^2 . \frac{h^2}{\infty^2} = h^2$, $\infty^3 . \frac{h^3}{\infty^3} = h^3$ ec. Cioè il prodotto di due quantità l' una infinita, e l' altra infinitamente piccola dello stesso ordine, sarà quantità finita.

i cui termini saranno tutti finiti. (*) L' uso generale di questa formola nella formazione delle serie è indicato ne' seguenti problemi.

XXXVI.

PROBLEMA I.° *Ridurre in serie infinita la potenza* $(x+\varphi)^m$.

Si faccia $(x+\varphi)^m = z$; sarà $y = x^m$: poichè, essendo y funzione di x, e z una simile funzione di $x+\varphi$, non può supporsi $z = (x+\varphi)^m$, quando non si faccia ancora $y = x^m$.

Posto adunque costante la dx e differenziando continuamente l' equazione $y = x^m$ si avrà

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = m.\overline{m-1}\ x^{m-2}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ x^{m-3}.$$

$$\frac{d^4}{dx^4} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ \overline{m-3}\ x^{m-4}.$$

ec.

Questi valori sostituiti nella formola generale daranno la serie infinita $(x+\varphi)^m = x + \frac{m}{1}x^{m-1}\varphi + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}x^{m-2}\varphi^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3.}x^{m-3}\varphi^3 +$ ec., (**) cioè la notissima espres-

(*) Due quantità infinitesime dello stesso ordine devono avere tra loro un rapporto finito: Dunque dividendo l' una per l' altra avrassi un quoto che sarà quantità finita.

(**) Questa serie si può ancora ritrovare senza l' ajuto dell' usata formola generale nel modo seguente.

ſione del binomio Neutoniano, di cui ciaſcuno fa l' uſo nel-

Cercò primieramente la potenza m del binomio $1 + x$, e perciò ſuppongo $(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ ec.: metto 1 al principio della ſerie perchè qualunque potenza di $1+x$ ha 1 per primo termine. Differenzio queſta equazione ed ho $m(1+x)^{m-1}dx = Adx + 2Bxdx + 3Cx^2 dx + 4Dx^3 dx +$ ec., ovvero, dividendo pel comun fattore dx, $m(1+x)^{m-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 +$ ec. (M) Queſt' equazione deve aver ſempre luogo qualunque ſia il valore di x. Riguardo adunque la x come quantità infinitamente piccola, ed ommetto nella ſteſſa equazione tutte i termini in cui entra la x, perchè in queſta ipoteſi ſvaniſcono in confronto degli altri termini finiti. Così io ho l' equazione ſempliciſſima $m(1)^{m-1} = A$, dalla quale ricavo $A = m$.

Differenzio di nuovo l'equazione (M) ed ho $m.\overline{m-1}(1+x)^{m-2}dx = 2Bdx + 6Cxdx + 12Dx^2 dx +$ ec., oſſia dividendo per dx, $m.\overline{m-1}(1+x)^{m-2} = 2B + 6Cx + 12Dx^2 +$ ec., e riguardando ancora la x come infinitamente piccola, cioè togliendo da queſt' ultima equazione ogni termine in cui entra x ho $m.\overline{m-1} = 2B$, e quindi $B = m.\overline{m-1}$.

Continuando nell' iſteſſa maniera trovo $C = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$,
$D = \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3.4}$, ec.

Metto adunque queſti valori nella ſuppoſta ſerie ed ho $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2.}x^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3.}x^3 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3.4}x^4 +$ ec.

Faccio $(x+\varphi)^m = x^m\left(1+\frac{\varphi}{x}\right)^m$, e ſcrivendo $\frac{\varphi}{x}$ in luogo di x ottengo $\left(1+\frac{\varphi}{x}\right)^m = 1 + m\frac{\varphi}{x} + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}.\frac{\varphi^2}{x^2} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}.\frac{\varphi^3}{x^3} +$ ec., e finalmente moltiplicando ciaſcun membro per x^m ho la cercata potenza $x^m\left(1+\frac{\varphi}{x}\right)^m$, oſſia $(x+\varphi)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}\varphi + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}x^{m-2}\varphi^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\,x^{m-3}}{1.2.3}\varphi^3 +$ ec.

la formazione delle potenze, nella estrazione delle radici, nell' evoluzione in serie infinite delle frazioni, e le varie trasformazioni in altre serie più comode e convergenti.

XXXVII.

PROBLEMA 2.° *Ridurre in serie il logaritmo* $l.(x \pm \varphi)$. Facciasi $l.(x+\varphi) = z$, sarà $y = l.z$, ovvero $y = A\ l.z$. (XXII.)

Onde differenziando $\frac{dy}{dz} = \frac{A}{z}$; $\frac{ddy}{dz^2} = -\frac{A}{z^2}$; $\frac{d^3y}{dz^3} = \frac{A}{z^3}$; ec. e sostituendo questi valori nella formola generale, avrassi $l.(x+\varphi) = l.x + A\left(\frac{\varphi}{x} - \frac{\varphi^2}{2x^2} + \frac{\varphi^3}{3x^3} - \frac{\varphi^4}{4x^4} + ec.\right)$ serie che convergerà tanto più presto, quanto più piccolo sarà il valore di φ rispetto ad x.

Similmente pel segno negativo si troverà $l.(x-\varphi) = l.x - A\left(\frac{\varphi}{x} + \frac{\varphi^2}{2x^2} + \frac{\varphi^3}{3x^3} + \frac{\varphi^4}{4x^4} + ec.\right)$, serie che sottratta dalla precedente darà $l.(x+\varphi) = l.(x-\varphi) + 2A\left(\frac{\varphi}{x} + \frac{\varphi^3}{3x^3} + \frac{\varphi^5}{5x^5} + \frac{\varphi^7}{7x^7} + ec.\right)$, cioè $l.\left(\frac{x+\varphi}{x-\varphi}\right) = 2A\left(\frac{\varphi}{x} + \frac{\varphi^3}{3x^3} + \frac{\varphi^5}{5x^5} + \frac{\varphi^7}{7x^7} + ec.\right)$.

In oltre se in ciascuna di queste serie si farà $\varphi = 1$, si avranno le trasformate.

$$l.(x+1) = l.x + A\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + ec.\right)$$

$$l.(x-1) = l.x - A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + ec.\right)$$

$$\mathrm{l.}(x+1) = \mathrm{l.}(x-1) + 2A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \text{ec.}\right)$$

$$\mathrm{l.}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \text{ec.}\right).$$

XXXVIII.

Corollario 1.° Col mezzo di queſte ſerie ſi poſſono calcolare tutti i logaritmi di qualunque ſiſtema: poichè dato il logaritmo di x dalla prima formola ſi avrà quello di $x+1$, dalla ſeconda quello di $x-1$, e ſuppoſto il logaritmo di $x-1$, dalla terza ſi avrà quello di $x+1$, e viceverſa. Finalmente colla quarta formola ſenza ſupporre verun logaritmo, potrà ritrovarſi quello di una frazione qualunque $\frac{x+1}{x-1}$, il cui numeratore ſia maggiore del ſuo denominatore di due unità, e queſta formola baſterà da ſe ſola per calcolare ogni logaritmo.

Per dare qualche ſaggio della pratica di queſti calcoli, ſi cerchi primieramente il logaritmo iperbolico di 2.

Si faccia $\frac{x+1}{x-1} = 2$; ſarà $x=3$ ed $A = 1$, poichè nel ſiſtema iperbolico il modulo di logaritmi è eguale all' unità; e ſoſtituendo queſto valore di x nella quarta formola ſi avrà

$$\mathrm{l.}\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \frac{1}{1948617} + \text{ec.}\right)$$

Questi termini ridotti in decimali sono

$$\frac{1}{3} = 0,3333333$$

$$\frac{1}{81} = 0,0123457$$

$$\frac{1}{1215} = 0,0008230$$

$$\frac{1}{15309} = 0,0000653$$

$$\frac{1}{177147} = 0,0000056$$

$$\frac{1}{1948617} = 0,0000005$$

Somma. 0,3465734

Tutti gli altri termini della serie sono inutili, perchè ci accontentiamo di 7 cifre decimali. Dunque sarà $l.\,2 = 2\,(0,3465734.) = 0,6931468$.

Conosciuto il logaritmo di 2 si trovano immediatamente tutti quelli delle sue potenze e radici: poichè $l.\,2^m = m\,l.\,2$.

Quindi $l.\,4 = l.\,2^2 = 2\,l.\,2 = 1,3862936$.

$l.\,8 = l.\,2^3 = 3\,l.\,2 = 2,0794404$.

$l.\,16 = l.\,2^4 = 4\,l.\,2 = 2,7725872$.

ec.

Ad avere il logaritmo di 3 si faccia $\frac{x+1}{x-1} = 3$, e perciò $x = 2$: questo valore sostituito nella serie darà

$$l.\,3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896} + \frac{1}{4608} + \frac{1}{22528} + \frac{1}{106496} + \frac{1}{491596} + \frac{1}{2228224} + \text{ec.}\right)$$

e per essere $\frac{1}{2} = 0,5000000$

$\frac{1}{24} = 0,0416666$

$\frac{1}{160} = 0,0062500$

$\frac{1}{896} = 0,0011162$

$\frac{1}{4608} = 0,0002170$

$\frac{1}{22528} = 0,0000443$

$\frac{1}{106496} = 0,0000093$

$\frac{1}{401520} = 0,0000020$

$\frac{1}{2228224} = 0,0000004$

Sarà $l.\,3 = 0,5493058 \times 2 = 1,0986116$

Col logaritmo di 3 si trova quello di ciascuna sua potenza e radice, poichè $l.\,3^m = m\,l.\,3$; e co' logaritmi di 2 e 3, e delle potenze e radici loro si trovano tutti quegli espressi dalle tre formole generali $l.\,(2^m \times 3^n)$, $l.\left(\frac{2^m}{3^n}\right)$, $l.\left(\frac{3^n}{2^m}\right)$, in cui m ed n sono numeri qualunque.

Se invece di porre $\frac{x+1}{x-1} = 3$ si farà $\frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{3}$, supponendo conosciuto il logaritmo di 4, la serie convergerà assai più rapidamente; poichè sarà $x = 7$,

e $l.\frac{x+1}{x-1} = l.\frac{4}{3} = 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{1029} + \frac{1}{84035} + \frac{1}{5764801} + \text{ec.}\right)$

Quindi $\frac{1}{7} = 0,1428571$

$\frac{1}{1029} = 0,0009718$

$\frac{1}{84035} = 0,0000119$

$\frac{1}{5764801} = 0,0000002$

e l. $\frac{4}{3} = 0,1438410 \times 2 = 0,2876820$.

Ma l. $\frac{4}{3}$ = l. 4 — l. 3. Dunque l. 3 = l. 4 — l. $\frac{4}{3}$ = 1, 3862936 — 0, 2876820 = 1, 0986116.

In generale conosciuto il logaritmo di un numero qualunque $a + 1$ si troverà quello di a con una serie prestissimo convergente col porre $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a+1}{a}$.

Cerchisi ancora il logaritmo di 5.

Fatto $\frac{x+1}{x-1} = \frac{6}{5}$; sarà $x = 11$, e l. $\frac{6}{5} = 2 \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{3 \cdot 11^3} + \frac{1}{5 \cdot 11^5} + \frac{1}{7 \cdot 11^7} + \text{ec.}\right)$, serie in cui tutti i termini dopo il 3.° sono inutili; poichè

$\frac{1}{11} = 0,0909090$

$\frac{1}{3 \cdot 11^3} = 0,0002504$

$\frac{1}{5 \cdot 11^5} = 0,0000012$

$\frac{1}{7 \cdot 11^7} = 0,0000000$

Somma 0, 0911606

Dunque l. $\frac{5}{6}$ = 0, 1823212, e l. 5 = l. 6 — 0, 1823212 = 1, 7917584 — 0, 1823212 = 1, 6094372.

Collo stesso metodo si potranno determinare i logaritmi degli altri numeri primi 7, 11, 13, 17, ec., e col mezzo di questi i logaritmi di tutti i numeri composti. Solo si deve avvertire, che quanto più grandi saranno i numeri di cui si cercheranno i logaritmi, tanto più pochi termini della serie si richiederanno, e che nei numeri maggiori il solo primo termine darà il logaritmo cercato.

XXXIX.

COROLLARIO 2.° Con questi logaritmi iperbolici si trovano facilmente i logaritmi de' medesimi numeri per qualunque altro sistema: giacchè questi altro non sono, come appare dalla formola generale, fuorchè gli stessi logaritmi iperbolici moltiplicati pel modulo A. Nel sistema delle tavole comuni sapiamo che la base logaritmica è 10: si tratta adunque di cercare il valore numerico di A, affine di poter convertire i trovati logaritmi iperbolici in tabulari.

Si prenda la formola generale $\mathrm{l.}\left(\frac{x+\varphi}{x-\varphi}\right) =$

$$2A\left(\frac{\varphi}{x} + \frac{\varphi^3}{3x^3} + \frac{\varphi^5}{5x^5} + \frac{\varphi^7}{7x^7} + \text{ec.}\right);$$

in essa si permutino i luoghi rispettivi ad x, e φ, cioè si ponga x in luogo di φ, e φ in luogo di x, e nello stesso tempo si faccia ancora $\varphi = 1$, così che la formola resti trasformata in quest' altra $\mathrm{l.}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2A\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ec.}\right)$. In questa si faccia $A = \frac{1}{p}$, e $\frac{1+x}{1-x} = a$;

farà $x = \frac{a-1}{a+1}$, indi sostituendo questi valori si avrà l. $a = \frac{2}{p}\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \text{ec.}\right)$. Finalmente posta la base $a = 10$, e l. $a = 1$ si avrà la serie convergente $p = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.\ 11^3} + \frac{9^5}{5.\ 11^5} + \frac{9^7}{7.\ 11^7} + \text{ec.}\right)$, i cui termini ridotti in decimali e sommati daranno il valore assai prossimo di $p = 2,302584$. Onde farà $A = \frac{1}{2,302584} =$ 0, 4342945 il modulo richiesto. (*)

Quindi pel sistema delle tavole comuni de' logaritmi farà l. $2 = 0,6931468 \times 0,4342945 = 0,3010300$
l. $3 = 1,0986116 \times 0,4342945 = 0,4771213$
l. $4 = 1,3862936 \times 0,4342945 = 0,6020600$
ec.

XL.

PROBLEMA 3.° *Ridurre in Serie la quantità esponenziale* a^x

Pongasi $a^x = y$, ed $a^x + \Phi = z$; farà $\frac{dy}{dx} = a^x$ l. x, $\frac{ddy}{dx^2} =$

(*) Il valore di A si trova più speditamente in questo modo. Sia a un numero, di cui si conosce il logaritmo iperbolico ed il tabulare; cioè sia

l. $a = b$ il logaritmo iperbolico

A l. $a = c$ il logaritmo tabulare.

Sarà l. $a : A$ l. $a :: b : c$.

Quindi $A = \frac{c\ \text{l.}\ a}{b\ \text{l.}\ a} = \frac{c}{b}$.

Nel sistema delle tavole si conoscono i logaritmi di tutti i numeri in progressione decupla 10; 100; 1000; ec.; che sono i numeri in serie naturale 1; 2; 3; ec.; dunque posto $a = 10$, farà $c = A$ l. $10 = 1$: ma nel sistema iperbolico si è trovato l. $10 = 2,302584$. Dunque si avrà come prima $A = \frac{1}{2,302584} = 0,4342945$.

$a^x (\text{l}.a)^2$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = a^x (\text{l}.a)^3$, ec., e sostituendo si avrà $a^{x+\varphi} =$

$a^x \left(1 + \frac{\varphi \, \text{l}.a}{1} + \frac{\varphi^2 (\text{l}.a)^2}{1.2} + \frac{\varphi^3 (\text{l}.a)^3}{1.2.3} + \text{ec.}\right)$, cioè dividendo per a^x.

$a^\varphi = 1 + \frac{\varphi \, \text{l}.a}{1} + \frac{\varphi^2 (\text{l}.a)^2}{1.2} + \frac{\varphi^3 (\text{l}.a)^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4 (\text{l}.a)^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$, e mettendo x in luogo di φ, $a^x = 1 + \frac{x \, \text{l}.a}{1} + \frac{x^2 (\text{l}.a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\text{l}.a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (\text{l}.a)^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$

XLI.

COROLLARIO 1.° Allo stesso modo si troverà

$$a^{-x} = 1 - \frac{x \, \text{l}.a}{1} + \frac{x^2 (\text{l}.a)^2}{1.2} - \frac{x^3 (\text{l}.a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (\text{l}.a)^4}{1.2.3.4} - \text{ec.}$$

XLII.

COROLLARIO 2.° Sia ω la base logaritmica nel sistema iperbolico, sarà $\omega^\varphi = 1 + \frac{\varphi \, \text{l}.\omega}{1.} + \frac{\varphi^2 (\text{l}.\omega)^2}{1.2} + \frac{\varphi^3 (\text{l}.\omega)^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4 (\text{l}.\omega)^4}{1.2.3.4.} + \text{ec.}$ Si faccia $\varphi = 1$, e $\text{l}.\omega = 1$: poichè il logaritmo della base è sempre l' unità, si avrà la serie convergente $\omega = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{ec.}$ esprimente il valore numerico della stessa base; cioè, riducendo i termini e sommando, $\omega = 2,7182818$, quantità che si può ottenere in diversi altri modi.

XLIII.

Problema 4.° *Sia* y *un dato arco di circolo*, *ed* x *una qualche ſua funzione*, *determinate la variazione dell' arco* y, *per una finita variazione* φ *ſoppraggiunta alla funzione* x, *e viceverſa*.

1.° Sia x Seno di y. Si indichi per *A* Sen. x l'arco y, e per *A* Sen. $(x \pm \varphi)$ l'arco variato che ſi cerca; cioè ſi faccia $y = A\,\text{Sen.}\,x$, e $z = A\,\text{Sen.}(x \pm \varphi)$.

Sarà (XXXI. 1.°)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

ec.

e ſoſtituendo queſti valori nella formola generale, naſcerà la ſeguente ſerie infinita

$$A\,\text{Sen.}(x \pm \varphi) = A\,\text{Sen.}\,x \pm \frac{\varphi}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{\varphi^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\varphi^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} \pm \frac{\varphi^5(9+72x^2+24x^4)}{120\,(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \text{ec.},$$

nella quale, ſe φ ſarà una quantità molto piccola, la ſomma de' 3, o 4 primi termini darà un valore molto proſſimo dell' arco cercato.

Si cerchi per eſempio l'arco di circolo, il cui ſeno ſia

eguale alla quarta parte del raggio, cioè alla funzione 0,25, supponendo il raggio eguale all' unità.

Dalle tavole de' seni si ha seno prossimo minore al dato - - - - - - - - - - - - - - - 0, 2498167
Arco y corrispondente a questo seno - - - 14.° 28'.
Differenza tra il predetto seno ed il seno dato 0, 0001233
$\sqrt{(1-xx)} = \text{Cos.}\, y = \text{Cos.}\, 14.^\circ\, 28'. =$ - - - 0, 9682731
Sen. $(x+\varphi) =$ - - - - - - - - - - - 0, 2500000

Sarà dunque $A\ \text{Sen.}\,(x+\varphi) = 14.^\circ\, 28' + \frac{\varphi}{\text{Cos.}\, y} + \frac{\varphi^2\,\text{Sin.}\, y}{2\,\text{Cos.}^3\, y}$, la quale espressione basta. Dunque, usando per maggior comodo i logaritmi, si troverà

$\text{l.}\ \varphi = 6,0909631$

$\text{l. Cos.}\ y = 9,9860069$

$\text{l.}\ \frac{\varphi}{\text{Cos.}\ y} = 6,1049562;\ \frac{\varphi}{\text{Cos.}\ y} = 0,0001273374$

$\text{l.}\ \frac{\varphi^2}{\text{Cos.}^2\ y} = 2,2099124$

$\text{l. Sen.}\, y = 9,3976205$

$\text{l.}\ \frac{\text{Sen.}\, y}{\text{Cos.}\ y} = 9,4116136$

$\text{l.}\ \frac{\varphi^2\,\text{Sen.}\, y}{\text{Cos.}^3\ y} = 1,6215260$

$\text{l.}\ 2 = 0,3010300$

$\text{l.}\ \frac{\varphi^2\ \text{Sen.}\ y}{2\ \text{Cos.}^3 y} = 1,3240960;\ \frac{\varphi^2\ \text{Sen.}\, y}{2\ \text{Cos.}\, y^3} = 0,0000002091$

Somma 0,0001275465.

Per ridurre questa frazione in minuti secondi di grado, si farà come 1 sta al valore del raggio in secondi, ch' è 206364", così la stessa frazione al 4.° termine. Operando ancora co' logaritmi avrassi

Lo.

Logaritmo della frazione 6, 1056670
Complemento logaritmico del Rag.° 4, 6855749

Residuo 1, 4200921

Numero corrispondente a questo residuo logaritmico, ossia valore della frazione in secondi 26″, 30861. Dunque l' arco cercato, ridotta la parte decimale in minuti terzi, quarti, ec., sarà 14.° 28.′ 26.″ 18.‴ 30.ⁱᵛ 59.ᵛ 45.ᵛⁱ 36.ᵛⁱⁱ

2.° Sia x Coseno. Posto $y = A$ Cos. x, e $z = A$ Cos.$(x \pm \varphi)$, avrassi (XXXI. 2.°) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}$, e la cercata serie, dopo aver cambiato il primo termine, sarà la precedente permutati i segni; cioè

$$A\,\text{Cos.}\,(x \pm \varphi) = A\,\text{Cos.}\,x \mp \frac{\varphi}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{\varphi^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\varphi^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} \mp \frac{\varphi^5(9+72x^2x+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} - \text{ec.}$$

3.° Sia x tangente. Posto $y = A$ Tang. x, e $z = A$ Tang. $(x \pm \varphi)$, avrassi (XXXI. 3.°)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+xx)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6xx-2}{(1+xx)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-24x^3+24x}{(1+xx)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120x^4-240x^2+24}{(1+xx)^5}$$

ec.

Quindi A Tang. $(x \pm \varphi) = A$ Tang. $x \pm \frac{\varphi}{1+xx} -$

$$\frac{\varphi^2}{(1+xx)^2}\,x \pm \frac{\varphi^3}{(1+xx)^3}\left(xx-\frac{1}{3}\right)-\frac{\varphi^4}{(1+xx)^4}\,(x^3-x) \pm \frac{\varphi^5}{(1+xx)^5}\left(x^4-2x^2+\frac{1}{5}\right)-\text{ec.}$$

4.° Sia x Cotangente; poichè (XXXI. 4.°) $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+xx}$, permutati i ſegni ai termini della formola precedente, e cambiato il 1.° termine, ſarà A Cot. $(x\pm\varphi)=A$ Cot. x $\mp$

$$\frac{\varphi}{1+xx}+\frac{\varphi^2}{(1+xx)^2}\,x\mp\frac{\varphi^3}{(1+xx)^3}\left(xx-\frac{1}{3}\right)+\frac{\varphi^4}{(1+xx)^4}\,(x^3-x)\mp\frac{\varphi^5}{(1+xx)^5}\left(x^4-2x^2+\frac{1}{5}\right)+\text{ec.}$$

In guiſa ſimile ſi potrà determinare la variazione dell' arco y per una finita variazione di ciaſcun altra ſua funzione: e viceverſa per una finita variazione ſopraggiunta ad y ſarà facile il determinare quella di ciaſcuna ſua funzione x; e ſe le variazioni ſi prenderanno aſſai piccole avraſſi di più un mezzo per interpolare le tavole de' ſeni, coſeni, tangenti, ec.

Allo ſteſſo modo, e col mezzo della ſteſſa formola generale, ſi potranno ottenere moltiſſime altre ſerie, alle quali le ritrovate finora potranno ſervire d' eſempio.

CAPO QUINTO.

USO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE NELL'APPROSSIMAZIONE ALLE RADICI REALI DELLE EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE.

XLIV.

Ogni equazione sì algebrica, che trafcendente può effere generalmente rapprefentata dalla formola $y = o$, in cui y è una funzione qualunque di x. Dicefi poi rifolta queft' equazione, quando fi determini un valore di x, il quale, foftituito in luogo della fteffa x, riduca la funzione y eguale a zero.

Sia f quefto valore di x, cioè una tra le radici dell' equazione $y = o$: perciò che fi è detto nel capo precedente, fe in luogo di x fi ponga f, oppure $x + (f - x)$, fupponendo la nuova funzione $= o$, fi avrà $f - x = \phi$, e $z = o$, onde $o = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx} + \frac{(f-x)^2\,ddy}{dx^2} + \frac{(f-x)^3\,y^3}{dx^3} +$ ec.

In quefta formola generale f fi fuppone eguale precifamente ad x, ma nell' inchiefta delle radici delle altre equazioni particolari f non è da principio che un valore proffimo di x, il quale col mezzo della fteffa formola generale fi riduce in feguito ad un valore molto più efatto. Il metodo è il feguente.

Si fupponga f già tanto proffima ad x, che $f - x$ poffa riguardarfi come una quantità affai piccola rifpetto alla fteffa x, ed i termini dell' equazione $o = y +$

$\frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3 y}{6d^3 x} +$ ec. prestissimo convergenti. In quest'equazione si ommettino tutti i termini, in cui $f-x$ si ritrova innalzata a qualche grado di potenza, cioè si consideri la stessa equazione, come se non fosse che $o = y + \frac{(f-x)dy}{dx}$, e da questa si cavi il valore $f = x - \frac{ydx}{dy}$, il quale, sostituito ad x il suo prossimo valore, sarà una radice più esata dell' equazione $y = o$.

Se questo valore di f si sostituirà alla stessa x nella medesima formola $f = x - \frac{ydx}{dy}$, si avrà in f una radice ancora più prossima alla vera, e prosseguendo in siffatta guisa a sostituire ad x il precedente valore di f accosteransi più e più al valore vero delle stessa radice f. Alcuni esempj rischiareranno meglio questo metodo.

1.° Si debba estrarre la radice n.^{esima} da un numero qualunque c.

Sia x la radice vera cercata, a la radice più prossima minore, e b l' eccesso di c sopra a^n, sarà $x^n = c = a^n + b$; ossia $x^n - a^n - b = o$, e $b = c - a^n$. Si faccia $x^n - a^n - b = y$; Sarà $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{nx^{n-1}}$.

Quindi $f = x - \frac{ydx}{dy} = x - (x^n - a^n - b)\frac{1}{nx^{n-1}} =$ (posto a in luogo di x) $a + \frac{b}{na^{n-1}} = \frac{c}{na^{n-1}} + \frac{\overline{n-1} \cdot a}{n}$.

2.° Sia $c = 10$, ed $n = 2$, cioè vogliasi estrarre la radice quadrata da 10: sarà $a = 3$, ed $f = \frac{10}{6} + \frac{3}{2} = 3,16666$.

Posto $a = 3,16666$, sarà $f = \frac{10}{6,33332} + \frac{3,16666}{2} =$ $3,16228$, valore già molto prossimo alla radice richiesta; poichè innalzato alla seconda potenza dà $10,00001$.

3.° Dallo stesso 10 estrarre la radice cuba.

Fatto $a = 2$, ed $n = 3$, si avrà $f = \frac{10}{12} + \frac{4}{3} =$ $2,16666$., e posto $a = 2,16666$, si troverà $f = \frac{10}{3(2,16666)^2}$ $+ \frac{4,33332}{3} = 2,15493$, radice molto prossima.

4.° Cercare una delle radici dell' equazione $x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$.

Posto $x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = y$.
ed $x = 1$ . . . . si avrà $y = -4$.
$x = 2$ . . . . $y = -2$.
$x = 3$ . . . . $y = +6$.

Da questi risultati si vede, che una delle radici contiensi tra 2, e 3, cioè che deve essere 2 più una frazione.

Differenziando dunque l' equazione avrassi $\frac{dx}{dy} =$ $\frac{1}{3x^2 - 6x + 4}$, e sostituendo sarà $f = x - \frac{ydx}{dy} = x -$ $\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 6}{3x^2 - 6x + 4} =$ (posto 2 in luogo di x) $2 + \frac{2}{4} = 2,5$.

Pongasi ora $x = 2,5$; sarà $f = 2,5 - 0\ 1129 =$ $2,3871$ una radice più prossima.

Si sostituisca di nuovo questo valore $2,3871$ ad x, e per maggiore comodità adoperando i logaritmi si troverà

$l.x = 0,3778706$; onde $x = 2,387100$.
$l.x^2 = 0,7557412$; $x^2 = 5,698247$.
$l.x^3 = 1,1336118$; $x^3 = 13,602281$.

$x^3 =$	13,602281	$3x^2 + 4 =$	21,094741
$4x =$	9,548400	$6x =$	14,322600
$x^3 + 4x =$	23,150681	Denominatore	6,772141
$3x^2 + 6 =$	23,094741		
Numeratore	0,055940		
Log. Num.^{e} $=$	8,7477225		
Log. Den.^{e} $=$	0,8307259	$x =$	2,3871000
Log.Frazione $=$	7,9169966	Frazione $=$	0,0082603
		Quindi $f =$	2,3788397

Radice assai prossima.

5.° Cercare una radice prossima dell' Equazione $x^4 + 5x^2 - 8x - 110 = 0$.

Posto $x^4 + 5x^2 - 8x - 110 = y$.

ed $x = 1$ . . . Sarà $y = -113$

$x = 2$ . . . . . . $y = -\ 90$

$n = 3$ . . . . . . $y = -\ \ 8$

$x = 4$ . . . . . . $y = +194$

Dunque la richiesta radice sarà 3 più una frazione

Ora differenziando l' equazione avrassi $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x^3 + 10x - 8}$,

e sostituendo nella formola sarà $f = x - \frac{x^4 + 5x^2 - 8x - 110}{4x^3 + 10x - 8}$;

Quindi fatto $x = 3$, sarà $f = 3,0615$;

fatto $x = 3,\ 0615$, sarà $f = 3,059893$;

fatto $x = 3,059839$, sarà $f = 3,059887$;

radice molto prossima alla vera.

6.° Cercare una radice dell' equazione $x^4 + \mathrm{l}.x - 15 = 0 = y$.

Si ha $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x^3 + Ax^{-1}}$; A è il modolo del logaritmo di x.

Dunque sarà $f = x - \frac{ydx}{dy} = x - \frac{x^4 + l. x - 15}{4x^3 + Ax^{-1}}$.

Posto $x = 2$, poichè 2 è la radice prossima, ed $A = 0, 4342945$ il modulo de' logaritmi delle tavole, si troverà $f = 2 - \frac{1,30103}{32,21715} = 1,9596$. Posto di nuovo $x = 1,9596$, ed usando i logaritmi avrassi

l. x	= 0, 2921674	x	= 1, 9596
l. x^3	= 0, 8765022	x^3	= 7, 524925
l. x^4	= 1, 1686696	x^4	= 14, 745844
l. A	= 9, 3466169		
l. Ax^{-1}	= 9, 0544495	Ax^{-1}	= 0, 113357
l. Num.^e	= 8, 5799093	Num.^e	= 0, 038011
l. Den.^e	= 1, 4801046	Den.^e	= 30, 213067
l. Fraz.	= 7, 0997147	Fraz.	= 0, 001258

Dunque $f = 1, 958342$. radice prossima.

7.° Sia ancora proposta l' equazione esponenziale $x^x - 30 = 0$.

Si riduca ai logaritmi, e si faccia x l. x — l. $30 = y$ sarà $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{A + l. x}$, ed $f = x - \frac{x\, l. x - l. 30}{A + l. x}$.

Si faccia $x = 3$; poichè 3 è la radice più prossima intera, sarà $f = 3, 0502$ radice prossima.

Si faccia $x = 3, 0502$, non contando che 6 ciffre decimali, sarà $f = 3, 050008$, radice che molto si avvicinerà alla vera.

XLV.

Dalla stabilita formola generale (XXXV) combinata coll' equazione $y = 0$ si possono ricavare varie altre espressioni di f ridotte in serie prestissimo convergenti: ne accenno quì una sola.

Si faccia $x + \varphi = 0$, e conseguentemente $z = 0$, poichè z è funzione di $x + \varphi$: dalla prima di queste equazioni si cava il valore $\varphi = -x$, quale sostituito nella solita formola generale darà la trasformata

$0 = y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{2dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{24dx^4}$ — ec., ovvero, mettendo y in luogo di 0, $y = y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{2dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{24dx^4}$ — ec.

Fingasi inoltre che la x, sia quella tale funzione di y, che la y stessa nella prima formola si è supposta di x; cioè si scriva x invece di y, y invece di x, e la trasformata nell' alternata serie $x = x - \frac{ydx}{dy} + \frac{y^2 ddx}{2dy^2} - \frac{y^3 d^3 x}{6dy^3} + \frac{y^4 d^4 x}{24dy^4}$ — ec.

Finalmente, riguardando come costante il differenziale dy, perchè tiene il luogo di dx, si faccia $\frac{dx}{dy} = p$, $\frac{dp}{dy} = q$, $\frac{dq}{dy} = r$, $\frac{dr}{dy} = s$, ec., si sostituiscano questi valori nella serie precedente, e supponendo $x = f$ si eguaglj la f alla funzione ultima trasformata; ciò fatto si avrà $f = x - py + \frac{1}{2} qy^2 - \frac{1}{6} ry^3 + \frac{1}{24} sy^4 - \frac{1}{120} ty^5 +$ ec., serie che convergerà assai rapidamente, quando ad x si sostituisca un suo valor prossimo.

Un esempio renderà più intelligibile l' applicazione di questa serie.

Si cerchi una delle radici dell' equazione $x^3 - 4x - 14 = 0$.

Posto

Posto $x^3 - 4x - 14 = y$ si ha

$$dy = (3x^2 - 4)\,dx \;;\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2-4} = p$$

$$dp = \frac{-6x\,dx}{(3x^2-4)^2} \;;\quad \frac{dp}{dy} = -\frac{6x}{(3x^2-4)^3} = q$$

$$dq = \frac{(90x^2+24)\,dx}{(3x^2-4)^4} \;;\quad \frac{dq}{dy} = +\frac{90x^2+24}{(3x^2-4)^5} = r$$

$$dr = \frac{-(2160x^3+1440x)\,dx}{(3x^2-4)^6} \;;\quad \frac{dr}{dy} = -\frac{2160x^3+1440x}{(3x^2-4)^7} = s$$

ec.

Quindi $f = x - \frac{y}{3x^2-4} - \frac{3xy^2}{(3x^2-4)^3} - \frac{(15x^2+4)y^3}{(3x^2-4)^5} - \frac{(90x^3+60x)y^4}{(3x^2-4)^7} -$ ec.

Una radice dell' equazione sta tra 2, e 3, ed è molto più vicina al 3 che al 2, come facilmente può vedersi col porre $x = 2$, ed $x = 3$. Dunque, posto $x = 3$, sarà $y = 1$, ed $f = 3 - \frac{1}{23} - \frac{9}{12167} - \frac{134}{6436343} = 3 - 0,04424$ $= 2,95576$, radice che può rendersi ancora più prossima spingendo la serie più avanti soltanto di uno o di due termini; ovvero, se si vogliono usare i logaritmi, come si è fatto nel applicazione del 1.° metodo, sarà sufficiente prendere per radice prossima 2,956, e sostituire questa ad x nella stessa serie, di cui basteranno più pochi termini ad avere una radice poco o nulla differente dalla vera.

Per esempio, posto $x = 2,956$, si avrà quanto segue

$l.x = 0,4707044$	
$l.x^2 = 0,9414088$	$x^2 = 8,737936$
$l.x^3 = 1,4121132$	$x^3 = 25,829335$
$l.y = 7,7271344$	$y = 0,005335$
$l.(3x^2 - 4) = 1,3466230$	$3x^2 - 4 = 22,213808$
$l.\frac{y}{3x^2 - 4} = 6,3805114$	$\frac{y}{3x^2 - 4} = 0,000240166$
$l.y^2 = 15,4542688$	
$l.(3x^2 - 4)^3 = 4,0398690$	
$l.3 == 0,4771213$	
$l.\frac{3xy^2}{(3x^2 - 4)^3} = 12,3622255$	$\frac{3xy^2}{(3x^2 - 4)^3} = 0,000000023$
	$0,000240189$
	$x = 2,956$

Dunque $f = 2,955759811$

CAPO SESTO.

Del Metodo diretto delle Tangenti.

Per metodo diretto delle Tangenti s' intende la maniera di determinare coll' ajuto del Calcolo Differenziale la Tangente, Sottotangente, Normale, Sottonormale, ed altre rette o funzioni per ciascun punto di una curva conosciuta per mezzo di una particolare equazione tra le sue coordinate.

XLVI.

Problema 1.° *Stabilire le formole generali di varie rette, o funzioni in una curva Algebrica AM.* (Fig. 1.ª)

Sia primieramente retto l' angolo delle coordinate, e siano PM, pm due ordinate alla Curva infinitamente prossima tra loro. L' archetto infinitesimo Mm compreso da queste due ordinate, che per l' estrema sua piccolezza può riguardarsi come una linea retta, si supponga prolungato fino ad incontrar l' asse AN in qualche punto T, e dal punto M sia condotta la MR parallela ad AN, e la MN perpendicolare alla MT.

Egli è manifesto 1.° Che MT è tangente, PT sottotangente, MN normale, PN sottonormale alla curva nel punto M, 2.° Che MR ossia Pp è il differenziale dell' ascissa AP, mR quello dell' ordinata PM, ed Mm quello dell' arco AM. Quindi se si chiami x la AP, y la PM, ed s l' arco AM, sarà $MR = dx$, $mn = dy$, ed $Mm = ds$, ovvero, a cagione del triangolo MRm rettangolo in R, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. 3.° Che essendo simili per ordine i trian-

goli mMR, MTP, PMN dal paragone de' lati, che in essi si corrispondono, si avranno le seguenti formole pe' valori delle diverse funzioni a qualunque punto M della curva.

$PT = \frac{ydx}{dy}$, poichè $PT : MP :: MR : mR$.

$MT = \frac{yds}{dy} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, poichè $MT : PM :: Mm : mR$.

$PN = \frac{ydy}{dx}$, poichè $PN : PM :: mR : MR$.

$MN = \frac{yds}{dx} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, poichè $MN : MP :: Mm : MR$.

Tang. $MTP = \frac{Rdy}{dx}$, poichè R : Tang. $MTP :: PT : MP : MR : mR$ (*).

Tang. $PMT = \frac{Rdx}{dy}$, poichè R : Tang. $PMT :: MP : PT :: mR : MR$.

Sia obbliquo l' angolo AQM delle coordinate AQ, MQ. Se da M perpendicolarmente alla AQ si cali MP, sarà essa il Seno, e PQ il Coseno del dato angolo AQM. Inoltre sia MT tangente alla curva, MN normale, mp infinitamente prossima a MP, MR parallela ad AQ, e si faccia $AP = x$, $MP = y$. Pe' triangoli simili MPT, MPN, MRm, si avranno tutte le formole precedenti.

La Curva abbia finalmente le ordinate convergenti ad uno stesso punto fisso P. Le formole generali della tangente, sottotangente, normale, sottonormale, ec. non differiranno dalle precedenti, se non in quanto che la dx vi esprimerà il differenziale di un arco di circolo, che passerà

(*) Il primo termine R di quest' analogia significa *Raggio*, quale può ancora supporsi eguale all' unità.

pel punto del contatto M, il cui raggio sarà l'ordinata PM condotta dal punto P al punto M. Imperocchè, alzata la perpendicolare PT alla MP che incontri la tangente MT in qualche punto T, e condotta la Pm infinitamente prossima alla PM, svanirà l'angolo infinitesimo MPm in confronto di ciascuno dei due angoli TPM, TPm, i quali si potranno considerare tra loro eguali. In oltre se col raggio PM e centro P verrà descritto l'archetto di circolo MR, questi sarà sensibilmente parallelo a TP, e si potrà assumere per una linea retta, ed il triangoletto differenziale MRm sarà simile al triangolo rettangolo MPT, e conseguentemente al triangolo MPN determinato dalla normale MN. Dunque, chiamando dx l'archetto MR, ed y l'ordinata MP, si avrà come nelle curve riferite all' asse.

$$PT = \frac{PM.MR}{mR} = \frac{ydx}{y} \; ; \; MT = \frac{PM.Mm}{mR} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)};$$

$$PN = \frac{PM.mR}{MR} = \frac{ydy}{dx} \; ; \; MN = \frac{PM.Mm}{MR} = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Per far uso di tutte queste formole generali nella ricerca delle varie funzioni, che competono a ciascun punto di una data curva, si differenzj l' equazione della curva, affine di avere il valore di dx dato per y e dy, oppure quello di dy dato per x e dx, e si sostituisca questo valore nella formola generale, che rappresenta la cercata funzione. Ciò fatto nella trasformata formola si avrà il valore della stessa cercata funzione in termini finiti ed affatto libero da ogni quantità differenziale. Questo s' intenderà parimenti per tutte le altre formole, che verremmo esponendo.

Se il punto della curva, per cui vuolsi la cercata funzione, sarà dato rispetto alla linea delle ascisse e delle ordinate, in luogo delle variabili x, y si potranno sostituire i valori, che esse hanno nel dato punto.

XLVII.

Problema 2.° *Determinare tutte le funzioni del problema precedente in ciascuna delle quattro Sezioni Coniche ordinarie data la loro equazione* $y^2 = px \mp \frac{pxx}{a}$. (*)

Da quest' equazione si ha $y = \left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, e differenziando $dy = \frac{1}{2}\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(pdx \mp \frac{2pxdx}{a}\right) =$

$$\frac{(ap \mp 2px)\,dx}{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$dy^2 = \frac{(ap \mp 2px)^2\,dx^2}{4a^2\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ap \mp 2px}{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{ap \mp 2px}.$$

e sostituendo questi valori nelle formole generali del problema precedente si avrà

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{ap \mp 2xp} = \frac{ax \mp xx}{\frac{1}{2}a \mp x}.$$

(*) Il Segno $-$ è per l' Ellissi, il $+$ per l' Iperbola. Il Circolo è un Ellissi in cui $p = a$, e la Parabola è pure un Ellissi in cui l' asse a è infinito. Così l' equazione all' Ellissi è $y^2 = px - \frac{pxx}{a}$, quella all' Iperbola $y^2 = px + \frac{pxx}{a}$, quella al Circolo $y^2 = ax - xx$, e quella alla Parabola $y^2 = px$, poichè, essendo a infinita, $\frac{pxx}{a}$ svanisce in confronto di px.

$$MT = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$$

$$\frac{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)}{(ap \mp 2px)\,dx} . \sqrt{\left(dx^2 + \frac{(ap \mp 2px)^2\, dx^2}{4a^2\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)}\right)}$$

$$= \frac{ax \mp xx}{a \mp 2x} . \sqrt{\left(4 + \frac{p(a \mp 2x)^2}{a^2 ax \mp a^2 xx}\right)}.$$

$$PN = \frac{ydy}{dx} = \frac{ap \mp 2px}{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} . \left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}px \mp \frac{px}{a}.$$

$$MN = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

$$= \frac{\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{dx} . \left(dx^2 + \frac{(ap \mp px)^2\, dx^2}{4a^2\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{p(a \mp 2x)^2}{(4a\,ax \mp xx)}\right)}.$$

$$\text{Tang. } MTP = \frac{dy}{dx} = \frac{ap \mp 2px}{2a\sqrt{\left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)}}.$$

$$\text{Tang. } PMT = \frac{dx}{dy} = \frac{2a\sqrt{\left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)}}{ap \mp 2px}.$$

XLIII.

Corollario. Le formole delle ſteſſe funzioni per l'Elliſſi, e per l'Iperbola non differiſcono che in alcuni ſegni, cioè dove il ſegno è doppio, il ſuperiore ſerve per l'Eliſſi, e l'inferiore per l'Iperbola.

Il Circolo è un Eliſſi, in cui gli aſſi conjugati ed il parametro ſono tra loro eguali: dunque poſto $p = a$, dalle medeſime formole all'Elliſſi ſi avrà

$$PT = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}, \ MT = \frac{ax - xx}{a - 2x} \sqrt{\left(4 + \frac{(a-2x)^2}{4ax - x^2}\right)}$$

$$= \frac{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - 2x},$$

$$PN = \frac{1}{2}a - x, \ MN = (ax - xx)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{(a-2x)^2}{4(ax-xx)}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}a = \text{Raggio},$$

$$\text{Tang. } MTP = \frac{a - 2x}{2\sqrt{(ax - xx)}}, \ \text{Tang. } PMT = \frac{2\sqrt{(ax - xx)}}{x - 2x}.$$

La Parabola è ella pure un' Ellissi, in cui a è quantità infinita. Dunque nelle formole all' Elissi, trascurate tutte le quantità finite che si trovano o congiunte con a, o divise per a, si avranno le medesime formole ridotte alla Parabola; cioè

$$PT = \frac{ax}{\frac{1}{2}a} = 2x, MT = \frac{xa}{a} \sqrt{\left(4 + \frac{pa^2}{a^2 x}\right)} = (4xx + px),$$

$$PN = \frac{1}{2}p, MN = (px)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{pa^2}{4a^2 x}\right)} = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)},$$

$$\text{Tang. } MTP = \frac{ap}{2a\sqrt{px}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{x}\right)}, \text{Tang.} PMT = \frac{2a\sqrt{px}}{ap}$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{x}{p}\right)}.$$

XLIX.

Problema 3.° *Determinare tutte le funzioni del 1.° problema in ciascuna delle 4. Sezioni Coniche di ogni ordine data la loro generale equazione* $y^{n+m} = x^m (a \mp p)^n \frac{p}{a}$.

Da questa equazione si ha $y = \left(x^m \cdot \overline{a \mp x}^n \cdot \frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}} =$

n

$x^{\frac{m}{m+n}}(a\mp x)^{\frac{m}{m+n}}\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}}$, e differenziando farà $dy =$

$\frac{m}{m+n}\,x^{\frac{m}{m+n}-1}\,(a\mp x)^{\frac{n}{m+n}}\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}}dx\ \mp$

$\frac{n}{m+n}\,x^{\frac{m}{m+n}}(a\mp x)^{\frac{n}{m+n}-1}\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}}dx =$

$\frac{1}{m+n}\left(x^{m}\,.\overline{a\mp x}^{n}.\,\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}}\left(\frac{m}{x}\mp\frac{n}{a\mp x}\right)dx =$

$\frac{1}{m+n}\left(x^{m}.\,\overline{a\mp x}^{n}.\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}}\left(\frac{m.\overline{a\mp x}\mp nx}{ax\mp xx}\right)dx.$

E fostituendo questo valore nelle solite formole generali avrassi

$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n).(ax\mp xx)}{m.(a\mp x)\mp nx}.$

$MT = \frac{y}{dy} = \sqrt{(dx^2+dy^2)} =$

$\frac{(m+n)(ax\mp xx)}{m.(a\mp x)\mp nx}.\sqrt{\left(1+\frac{1}{(m+n)^2}\left(x^{m}\overline{a\mp x}^{n}.\frac{p}{a}\right)^{\frac{2}{m+n}}\left(\frac{m.\overline{a\mp x}\mp nx}{ax\mp xx}\right)^2\right)}.$

$PN = \frac{ydy}{dx} = \frac{1}{m+n}\left(x^{m}\,\overline{a\mp x}.\,\frac{p}{a}\right)^{\frac{2}{m+n}}\left(\frac{m.\,\overline{a\mp x}\mp nx}{ax\mp xx}\right).$

$MN = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)} =$

$x^{m}.\,\overline{a\mp x}^{n}.\frac{p}{a}\Big)^{\frac{1}{m+n}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{(m+n)^2}\left(x^{m}.\,\overline{a\mp x}^{n}.\frac{a}{p}\right)^{\frac{2}{m+n}}\left(\frac{m.\overline{a\mp x}\mp ax}{ax\mp xx}\right)^2\right)}$

Tang. $MTP = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m+n}\left(x^{m}\,.\overline{a\mp x}^{n}.\,\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+x}}\left(\frac{m.\overline{a\mp x}\mp nx}{ax\mp xx}\right)$

H

$$\text{Tang.}\, PMT = \frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)(ax \mp xx)}{\left(x^m \cdot \overline{a \mp x}^n \cdot \frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{m+n}} \left(m \cdot \overline{a \mp x} \mp nx\right)}.$$

L.

COROLLARIO. Fatto m ed n eguale all' unità, l' equazione si riduce alle curve coniche ordinarie, e tutte le funzioni ritrovate riduconsi a quelle del problema precedente.

LI.

PROBLEMA 4.° *Da un punto T dato nell' asse di una curva algebrica condurre alla stessa una tangente.*

La curva sia una delle 4. sezioni coniche ordinarie.

SOLUZIONE. Dal num. XLVII. si ha $PT = \frac{ax \mp x}{\frac{1}{2}a \mp x}$, e fatta la quantità data $AT = b$, sarà $AP = \frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x} - b$. Ma $AP = x$: dunque $x = \frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x} - b$, e togliendo le frazioni, ed eliminando la x sarà x, ossia $AP = \frac{ab}{a \mp 2b}$. In P perpendicolarmente all' asse si alzi l'ordinata PM, e si tiri MT, che sarà la tangente cercata.

LII.

COROLLARIO. Nell' Iperbola, fatto $b = \frac{1}{2} a$, si ha $AP = \frac{ab}{0} = \infty$; Cioè la tangente condotta dal centro, e la sottotangente, che vi corrispondono, sono infinite.

LIII.

PROBLEMA 5.° *Sopra l' asse prolungato di una curva* (Fig. 1.ª) *dato un punto D, ed in esso alzata la perpendicolare DV allo stesso asse, da un punto V dato in questa retta condurre una tangente alla curva.*

Sia questa curva una parabola ordinaria.

SOLUZIONE. Si chiami b la AD, c la DV. Sarà $DT = PT - x - b = x - b$, poichè (XLVIII) $PT = 2x$. Ma per la somiglianza dei triangoli VDT, MDT si ha $DT = \frac{DV.PT}{PM} = \frac{2cx}{\sqrt{px}}$.

Dunque $x - b = \frac{2cx}{\sqrt{px}}$

$$x^2 - 2bx + bb = \frac{4c^2x}{p}$$

e riducendo l' equazione, e liberando la x si avrà

$$x = b + \frac{2c^2}{p} \pm \sqrt{\left(b + \frac{2c^2}{p}\right)^2 - b^2}$$

$$\text{e } DT = \frac{2c^2}{p} \mp \sqrt{\left(b + \frac{2c^2}{p}\right)^2 - b^2}.$$

Dunque la retta, che passerà per i due punti T, V, sarà tangente alla curva.

LIV.

PROBLEMA 6.° *Nel perimetro di una Curva, in cui le coordinate formano un angolo retto, cercare un punto, dal quale si possa condurre una tangente, che formi, o coll' ascissa o coll' ordinata corrispondente un dato angolo.*

Sia la curva una delle sezioni coniche ordinarie, e si

chiami t la tangente del dato angolo 1.° Se quest' angolo è formato dalla tangente alla curva coll' ascissa corrispondente, prolungata se abbisogna, sarà $t = \frac{dy}{dx} = \frac{ap \mp px}{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}$, e liberando la x da quest' equazione si troverà $x = \frac{2a^2 t^2 \pm ap}{p \pm 4at^2} \pm \sqrt{\left(\frac{-a^2 p^2}{p \pm 4at^2} + \left(\frac{2a^2 t^2 \pm ap}{p \pm 4at^2}\right)^2\right)}$

2.° Se il dato angolo è formato dalla tangente alla curva coll' ordinata, sarà $t = \frac{dx}{dy} = \frac{2a\left(px \mp \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{ap \mp px}$, ed $x = \frac{2a^2 \mp apt^2}{pt^2 \pm 4a} \pm \sqrt{\left(\frac{-apt^2}{pt^2 \pm 4a} + \left(\frac{2a^2 \mp apt^2}{pt^2 \pm 4a}\right)^2\right)}$.

LV.

COROLLARIO. Nella parabola si ha dunque pel 1.° caso $t = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\sqrt{px}}$, ed $x = \frac{p}{4t^2}$; e pel 2.° caso $t = \frac{dx}{dy} = \frac{2\sqrt{px}}{p}$, ed $x = \frac{pt^2}{4}$. In ciascun caso poi, supposta la tangente t eguale al raggio del suo circolo, ossia $= 1$, si ha $x = \frac{1}{4}p$; cioè la tangente alla curva che forma o coll' asse, o coll' ordinata un angolo semiretto parte dall' estremità dell' ordinata, che passa pel foco della parabola.

LVI.

PROBLEMA 7.° *Determinare la fottotangente nella logaritmica.*

La logaritmica è una Curva XY (Fig. 2.ª) di tale proprietà che fatta origine in qualunque punto A del di lei affe MN, e fopra di quefto prefe delle Afciffe AP, AQ, AR, ec. in ferie aritmetica, le ordinate corrifpondenti PB, QC, RD, ec. fono in ferie geometrica, cioè quelle afciffe fono i logaritmi di quefte ordinate. Se per efempio fi chiami x alcuna delle afciffe AP, ed y l' ordinata corrifpondente PB, farà $x = \text{l}.y$, ovvero $x = A\ \text{l}.\ y$, indicando per A il modulo del fiftema logaritmico rappresentato dalla curva. Dunque, differenziando queft' equazione, fi avrà $dx = \frac{Ady}{y}$, e $\frac{ydx}{dy} = A = PT$. Cioè la fottotangente nella logaritmica è una quantità coftante, ed eguale al modulo del fiftema da effa rapprefentato.

LVII.

COROLLARIO. Nella Logaritmica, che rapprefenta il fiftema dei logaritmi iperbolici, il modulo, offia la fottangente è eguale all' ordinata, che paffa per l' origine delle afciffe; poichè in quefto punto fi ha $x = 0$, ma $0 = \text{l}.\ 1$: dunque $y = 1 = A = PT$. E nel fiftema dei logaritmi tabulari, il modulo, e la fottotangente fono eguali alla frazione 0, 4343032, cioè alla parte 0, 4343032 dell' ordinata, che paffa per l' origine delle afciffe.

LVIII.

PROBLEMA 8°. *Determinare il valore della sottangente nella Spirale.*

La Spirale è una curva descritta da un punto C, (Figura 4.ª) il quale, partendo dal centro di un circolo, percorre uniformemente il suo raggio CA, nel tempo stesso che questo raggio compisce con moto equabile un intera rivoluzione intorno al suo centro. Il punto C alla fine del moto si trova all' altra estremità A del raggio, e prolungato questo al di là del circolo, e continuati i due moti, alla fine della seconda rivoluzione del raggio si ha una seconda rivoluzione spirale; alla fine della terza rivoluzione del raggio si ha una terza rivoluzione di spira, e così di seguito. La spirale ha tanti giri, quanti ne ha fatti il raggio intorno al centro. Archimede è stato l' inventore di questa curva.

Per l' uniformità dei moti, gli spazj trascorsi dal punto C sopra il raggio AC devono essere proporzionali agli spazj, od archi circolari descritti nei medesimi tempi dal raggio stesso. Dunque sarà $CM : CA :: $ Arc. ABN : Arc. $ABNA$, e fatto $CM = y$, $AC = a$, Arc. $ABN = x$, ed Arc. $ABNA = c$, sarà

$y = \frac{ax}{a}$ l' equazione alla Spirale nella prima rivoluzione del raggio.

$y = a + \frac{ax}{c}$ la stessa equazione nella seconda rivoluzione, poichè x diventa $c + x$.

$y = 2a + \frac{ax}{c}$ l' equazione nella terza rivoluzione, ec.

Differenziando adunque queſt' equazione ſi avrà

$dy = \frac{adx}{c}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{c}{a}$

Quindi $\frac{ydx}{dy} = \frac{cy}{a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{ax}{c} = x$. Dunque nella ſpirale d' Archimede la ſottotangente è eguale all' aſciſſa x, cioè all' arco circolare intercetto dai raggi; che racchiudono l' arco corriſpondente della curva ed arrivato il raggio *CN* alla ſua prima poſizione *CA*, la ſottotangente nel punto *A* della curva ſarà eguale all' intera periferia del circolo *ANBA*.

Nelle ſpirali di tutti i generi, la di cui equazione generale è $y^m = \frac{a^m x^n}{c^n}$, ſi avrà $PT = \frac{mc^n y^n}{na^m x^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot x$, formola che ſi ridurrà alla precedente nel caſo di $m = n = 1$.

LIX.

PROBLEMA 9.° *Determinare il valore della ſottangente nella Quadratrice.*

Sia *AC* il raggio (Fig. 4.ª), *C* il centro, *AD* la tangente in *A* al quarto circolo *AEB*. Si intenda il raggio *AC* aggirarſi equabilmente intorno al ſuo centro per tutto il quadrante *AEB*, e nello ſteſſo tempo muoverſi la tangente *AD* con moto uniforme e parallelo da *A* verſo *C*, di modo, che quando il raggio *AC* ſia giunto alla poſizione perpendicolare *BC*, la *AD* cada ſopra *BC*. La curva *AMB* deſcritta dal punto *M* di continua interſecazione del raggio colla tangente ſi chiama *Quadratrice*.

In questa curva essendo uniformi i moti fatti in egual tempo dalla AD sopra AC, e dal raggio AC intorno al centro C, gli spazj trascorsi in due diversi tempi dalla AD sopra il raggio AC saranno proporzionali agli archi descritti nei medesimi tempi dallo stesso raggio nel quadrante; e però chiamando x lo spazio AP, z l'arco di circolo AE, y l' ordinata MP, a il raggio AC, e c il quadrante AEB si avrà $x : z :: a : c$, onde $z = \frac{cx}{a}$. Ma pe' triangoli simili CPM, CAD, $CP : PM :: AC : AD =$ Tang. AE, ossia $a - x : y :: a :$ Tang. z. Dunque sarà $y = \left(\frac{a-x}{a}\right)$. Tang. $z = \left(\frac{a-x}{a}\right)$. Tang. $\frac{cx}{a}$ l'equazione a questa curva, in cui le ascisse verranno computate dall' origine A. Che se le ascisse si prenderanno dal centro, fatto $PC = x$, sarà invece l' equazione $y =$ $\frac{x}{a}$. Tang. $\left(c - \frac{cx}{a}\right) = \frac{x}{a}$Cot.$\frac{cx}{a}$, quale differenziata darà

$$dy = \text{Cot.}\left(\frac{cx}{a}\right)\frac{dx}{a} - \frac{cxdx}{a^2\,\text{Sin.}^2\left(\frac{cx}{a}\right)}.$$

Quindi $QT = -\frac{xdy}{dx} = -\frac{x}{a}$. Cot.$\left(\frac{cx}{a}\right) + \frac{cx^2}{aa\,.\,\text{Sin.}^2\left(\frac{cx}{a}\right)}$; sottangente, e $CT = CQ + QT = y + QT = \frac{cx^2}{a^2\,\text{Sin.}^2\left(\frac{cx}{a}\right)}$.

Si adopera la formola $-\frac{xdy}{dx}$ invece della solita $\frac{ydx}{dy}$, perchè in questa curva la sottangente si prende nella linea CB delle ordinate, e non su quella delle ascisse, e la tan-

tangente MT va ad incontrare la CB dalla parte oppofta rifpetto al vertice A.

LX.

COROLLARIO 1.° Se $x = a$ farà $CT = \frac{c}{\text{Sin.}^2 90^\circ} = \frac{c}{r^2} = c$, fuppofto il raggio eguale all' unità.

LXI.

COROLLARIO 2.° Sopra AC prolungato verfo N, fi prenda $AN = AC$, in N al diffotto di AN fi meni l' indefinita perpendicolare NR, e verfo quefta parte fia prolungata la curva Am. Sarà NR affintoto al ramo della curva Am, cioè NR non toccherà la curva che in un punto infinitamente lontano dalla fua origine A: mentre nella prima equazione fatto $x = AN = -a$, farà $y = -2$ Tang. $c = -2$ Tang. $90.^\circ$, che è quantità infinita.

LXII.

PROBLEMA 10.° *Siano AN, AM (Fig. 5.ª) due curve Algebriche riferite ad uno fteffo affe AQ. Sia conofciuta l' equazione della prima AN, ed il rapporto delle ordinate PM alla feconda colle corrifpondenti coordinate AP, PN alla prima curva; determinare il valore della fottangente MT per un punto qualunque M della curva AM.*

Sia pm infinitamente proffima alla PM, e fiano MR, NS parallele all' affe AQ. Si faccia $AP = x$, $PN = y$, $PM\ z$, $MR = NS = Pp = dx$, $nS = dy$, $mR = dz$, e fi fupponga la tangente cercata TM al punto M della curva

I

AM. Per la ſimiglianza dei triangoli *TPM*, *MRm*, ſi avrà $mR : MR :: MP : PT$, cioè $dz : dx :: z : PT = \frac{zdx}{dz}$.

Se per eſempio ſi ſupponga, che la curva *AN* ſia una parabola ordinaria, e che ciaſcuna ordinata *PM* della curva *AM* ſia media proporzionale tra l' aſciſſa corriſpondente *AP* e l' ordinata *PN* di queſta parabola, ſarà

$$y = \sqrt{px}, \; dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$$

$$z = \sqrt{xy}, \; dz = \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}}$$

e ſoſtituendo queſti valori nella formola precedente avraſſi

$$PT = \frac{dx\sqrt{xy} \,.\, 2\sqrt{xy}}{ydx + xdy} = \frac{2xydx}{ydx + xdy} = \frac{2x\sqrt{px} \,.\, dx}{\sqrt{px} \,.\, dx + \frac{xpdx}{2\sqrt{px}}}$$

$$= \frac{4x}{3}.$$

Dunque per condurre la tangente ad un dato punto *M* della curva *AM*, ſi dovrà abbaſſare l' ordinata *MP* all' aſſe *AQ*, e prendere la ſottotangente *PT* eguale ai $\frac{4}{3}$ dell' aſciſſa *AP*, cioè $AT = \frac{1}{3} AP$.

LXIII.

PROBLEMA II.° *Le tre curve AO, AN, AM* (Fig. 6.) *hanno di comune il vertice A, e l' aſſe AP: le prime due ſono conoſciute, e la terza AM è tale, che ciaſcuna di lei ordinata PM è una data funzione delle due ordinate corriſpondenti PO, PN alle altre due curve: determinare la ſottangente MT per ciaſcun punto M della curva AM.*

Si chiami y l' ordinata *PO* alla prima curva, z l' ordinata *PN* alla ſeconda, v l' ordinata *PM* alla terza, ed

x la comune ascissa AP. Si concepiscano l' infinitamente prossima pm, le OS, NR, MQ parallele all' asse AQ, e le sottangenti PZ, PV, MT nelle tre curve corrispondenti all' ascissa AP. La prima PZ si faccia $= a$, e la seconda $PV = b$, perchè amendue conosciute. Sarà $oS = dy$, $nR = dz$, $mQ = dv$, $MQ = NR = OS = dx$. Quindi dai due triangoli simili OPZ, OSo, si avrà $OP : PZ :: oS : OS$

ossia $y : a :: dy : OS = \frac{ady}{y}$

dai due altri triangoli NPV, NRn, $NP : PV :: nR : RN$

ossia $z : b :: dz : RN = \frac{bdz}{z}$

Ed eguagliando i valori sarà $\frac{ady}{y} = \frac{bdz}{z}$, e $dz = \frac{azdy}{by}$

Ma i due triangoli simili MPT, MQm, danno $mQ : MQ :: MP : PT$.

Dunque sarà $PT = \frac{MP \cdot MQ}{mQ} = \frac{vdx}{dv} = \frac{avdy}{ydv}$, valore facile a liberarsi dalle variabili y, v, qualora in luogo di v, e dv si sostituiscano i loro valori dati per y, e z.

Sia v terza proporzionale a y, e z. Sarà $v = \frac{z^2}{y}$, e $dv = \frac{2zydz - z^2 dy}{y^2}$, ovvero sostituendo a dz il suo valore, sarà $dv = \frac{2az^2 dy - bz^2 dy}{by^2}$. Quindi $PT = \frac{ady}{y} \cdot \frac{v}{dv} = \frac{ady}{y} \cdot \frac{byz^2}{2az^2 dy - bz^2 dy} = \frac{ab}{2a - b}$.

Se l' ordinata MT fosse invece media tra OP, ed NP, come nella Fig. 7., avrebbesi $PT = \frac{2ab}{b + a}$. E se in quest' ipotesi la curva AN avesse un altra origine B nell' asse fuori del punto A, ed al di là di P, come nella Fig. 8., sminuendosi l' ordinata NP al crescere di PO, il differenziale

dz ſarebbe negativo, e la formola della ſottangente ſarebbe $\frac{2ab}{b-a}$. Se AO, BN foſſero due rette, e PM media tra OP, e PN, (Fig. 9, e 10), la curva AM ſarebbe una delle 4 ſezioni coniche ordinarie. Poichè, chiamando m il ſeno, e n il coſeno dell'angolo OAP, q il ſeno, e r il coſeno dell' angolo NBP, $2a$ l' aſſe AB, x l' aſciſſa AP, nel triangolo rettangolo APO ſi avrebbe $n:m::AP:PO$, oſſia $n:m::x:y=\frac{mx}{n}$,

e nel triangolo NBP, $r:q::BP:PN$, cioè $r:q::(2a\mp x):z=\frac{q}{r}(2a\mp x)$; il ſegno ſuperiore è per la figura 9, e l'inferiore per la fig. 10. Dunque moltiplicando ſarebbe yz, oſſia $vv=\frac{mq}{nr}(2ax\mp xx)$, e facendo $\frac{mq}{nr}=\frac{b^2}{a^2}$ riſulterebbe l'equazione alle ſezioni coniche $vv=\frac{b^2}{a^2}(2ax\mp xx)$.

LXIV.

PROBLEMA 12.° *Le due curve AM, BN* (Fig. 11) *ſieno riferite ad uno ſteſſo foco P, e ſi conoſca la prima AM, la ſua ſottangente PG per ciaſcun punto M, e la coſtante relazione delle corriſpondenti ordinate PM, PN nelle due curve; condurre la tangente NT ad un qualunque punto N della curva BN, cioè determinare il valore della ſottangente PT allo ſteſſo punto.*

Fatto centro al foco P co' due raggi PM, PN ſi deſcrivano i due archetti infiniteſimi MR, NS, e ſi conduca la Pn infinitamente proſſima alla PN. Si chiami z l'ordinata PN, y la PM, e p la ſottangente PG.

Dai due triangoli rettangoli MPG, MRm, in cui gli angoli PMG, MmR sono sensibilmente eguali si ha $PM : PG :: mR : MR$, ossia $y : p :: dy : MR = \frac{pdy}{y}$

Dai due settori MPR, NPS si ha pure $PM : PN :: MR : NS$ cioè $y : z :: \frac{pdy}{y} : NS = \frac{pzdy}{y^2}$

e dai triangoli NPT, NSn . . . . . $nS : NS :: PN : PT$ ossia $dz : \frac{pzdy}{y^2} :: z : PT = \frac{pz^2 dy}{y^2 dz}$

Se si suppone $MN = mn = a$, cioè che la prozione d'ordinata MN compresa tralle due curve AM, BN sia costante ed eguale ad a, si avrà $z = y + a$, e quindi $dz = dy$, e $PT = \frac{pz^2}{y^2}$.

Per condurre questa sottangente si tiri NF parallela a MG, la diagonale MF, e la NT parallela a MF. Sarà NT tangente, e PT sottangente al punto N della curva BN; poichè i due triangoli simili PMG, PNF daranno $PM : PG :: PN : PF = \frac{PG . PN}{PM} = \frac{pz}{y}$, e gli altri due PMF, PNT, $PM : PF :: PN : PT = \frac{pzz}{y^2}$.

Se AM invece di curva fosse linea retta, BN sarebbe una curva detta comunemente *Concoide*. L' inventore di questa curva è stato Nicomede.

LXV.

PROBLEMA 13.° *Delle due Curve* CQD, AMC (Fig.12.) *riferite ad uno stesso asse* AD *l' una sia algebrica, e l' altra trascendente da un punto qualunque* M *di questa sia condotta* MP *perpendicolare al comun asse* CD, *che incontri in* Q

l' altra curva. L'equazione alla curva algebrica sia espressa da una relazione qualunque tralle due coordinate CP, PQ, e quelle alla curva trascendente AMC da un altra qualunque relazione tra l' arco CQ, e l' ordinata MQ: condurre al punto M di questa curva una tangente.

In due modi si può condurre questa tangente 1.° col ricercare il punto V, in cui essa tangente deve incontrar l' asse CD; 2.° col supporre condotta al punto corrispondente Q della curva CDQ la tangente QZ, e determinare sopra di essa il punto d' incontro T.

La soluzione del problema riducesi adunque a saper determinare il valore della sottangente, che compete al punto M presa o sopra il comun asse CD, o sopra la supposta tangente QZ.

Sia mp infinitamente prossima all' ordinata MP, siano MS, NQ parallele a CD, ed MR parallela a QZ, ossia all' archetto Qq.

Si faccia $CP = x$, $PQ = y$, $MP = z$, $MQ = v$, ed Arc. $CQ = s$.

Sarà $MS = Pp = dx$, $RS = qN = dy$, $mS = dz$, $MR = Qq = ds$, $mR = dv$. I triangoli simili mSM, MPV daranno $mS : MS :: MP : PV = \frac{MP . MS}{mS} = \frac{zdx}{dz}$, e i due altri mRM, mQT, $mR : MQ :: MR : QT = \frac{MQ . MR}{mR} = \frac{vds}{dv}$.

Se in ciascuna di que due formole si sostituiranno i differenziali delle variabili, che stanno nelle equazioni delle due curve CQD, AMC, si avrà in termini finiti il valore della settangente alla curva AMC.

La curva $AMCB$ sia a cagione d' esempio una cicloide generata dalla rotazione del circolo CQD sopra la retta

AB. Al principio del moto del circolo genitore si suppone, che un punto della sua periferia stia in qualche punto *A* della retta *AB*, e che in seguito, arrotolandosi questo circolo sopra la *AB* da *A* verso *B*, il punto *A* segni sul piano la traccia del suo moto, il quale si continui, finchè il punto *A* ritorni sulla linea *AB*. La traccia ossia curva *AMCB* è la *Cicloide* generata. Questa cicloide dicesi *ordinaria* se il circolo non ha altro moto che quello della sua rotazione sopra la *AB*, *allungata* se il circolo ha ancora un moto particolare di traslazione nel senso del 1.° moto, *accorciata* se questo 2.° moto del circolo si fa in senso contrario a quello di rotazione.

La porzione *AB* determinata dai due prossimi contati del punto genitore sulla *AB* si chiama *base*, il punto *C* della curva più lontano dalla *AB vertice*, la perpendicolare *CD* abbassata dal punto *C* sulla *AB Asse* della Cicloide.

Dalla descrizione di questa curva si ha 1.° che nell' ordinaria cicloide la base *AB* è eguale alla periferia del circolo genitore, nell' allungata è maggiore della stessa base, e nell'accorciata è minore. 2.° Che, supposto equabile il moto di traslazione, ciascun ordinata *MQ*, ed il suo arco corrispondente *CQ* debbono avere una ragione costante, ed eguale a quella della base *AB* e del circolo *CQDC*; mentre, supposto il circolo in *EMF*, e condotte le corde *ME*, *QD*, queste saranno eguali, e parallele, essendo eguali gli archi *ME*, *QD* da esse sottesi, e però sarà ancora $MQ = ED$, ed $MF = CQ$. Ma $AD = \frac{1}{2} AB$, e corrisponde alla metà del circolo, e per l' indole della curva *AE* : Arc. *ME* :: *AD* : Arc. *EMF* : : *ED* : Arc. *MF*. Dunque la periferia dell' intero circolo starà alla base della cicloide, come l'arco *MF* a *ED*, ossia come l' arco *QC* a *MQ*. 3.° Quin-

di farà $MQ = \frac{AB . \text{Arc}.CQ}{CQDOC}$, ovvero, chiamando a la base AB, e b la perifería del circolo $CQDOC$, farà $v = \frac{as}{b}$, e differenziando $dv = \frac{ads}{b}$.

Ora per usare la prima formola $PV = \frac{zdx}{dz}$ si ha $dv = mR = mS - RS = dz - dy = \frac{ads}{b}$, onde $dz = \frac{ads}{b} + dy$; ma $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, e per la proprietà del circolo $y = \sqrt{(2rx - xx)}$, $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$, e $dy^2 = \frac{r^2\, dx^2 - 2rxdx^2 + x^2\, dx^2}{2rx - xx}$. Dunque farà $ds = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$, $dz = \frac{ardx}{b\sqrt{(2rx - xx)}} + \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{(2rx - xx)}}$, e $PV = \frac{bzdx\sqrt{(2rx - x^2)}}{ardx + brdx - bxdx} = \frac{bz\sqrt{(2rx - xx)}}{ar + br - bx}$.

Se la cicloide è ordinaria, in cui $a = b$, farà $PV = \frac{z\sqrt{(2rx - xx)}}{2r - x}$: questo valore gettato in analogía darà $2r - x : \sqrt{(2rx - x^2)} :: z : PV$, ovvero $2r - x : y :: z : PV$; ma nel circolo $2r - x : y :: y : x$. Dunque $y : x :: z : PV$: cioè la sottangente farà una quarta proporzionale all'ordinata del circolo genitore, all'ascissa comune al circolo ed alla curva, ed all'ordinata della curva stessa; e per la similianza de' triangoli PQC, PMV la tangente MV dovrà essere ancora parallela alla corda CQ. Dunque per condurre questa tangente si tirerà la corda CQ, e del punto M si condurrà la parallela MV a questa corda.

Per la seconda formola $QT = \frac{vds}{dv}$, surrogati i valori di v, e dv si avrà immediatamente $QT = \frac{asds}{b} . \frac{b}{ads} = s$. Cioè nella cicloide la sottangente è eguale all'ascissa curvilinea,

vilinea, ossia all' arco di circolo QC, e se la cicloide sarà l'ordinaria, la stessa sottangente sarà ancora eguale all' ordinata MQ. Dunque in questo caso per condurre una tangente alla curva basterà prendere sopra la QZ la parte $QT = QM$, ed unire i punti M, T colla retta MT.

LXVI.

Una curva dicesi avere un assintoto allora che, avendo qualche ramo infinito la tangente, che si suppone condotta all' estremità di questo ramo, incontra o l' asse delle ascisse, o quello delle ordinate ad una distanza finita dal vertice, e l' assintoto è questa tangente infinita.

Tra gli assintoti alle curve alcuni sono paralleli alla linea delle ascisse, altri a quella delle ordinate, ed altri formano un angolo determinato o coll' asse principale, o colle ordinate. A determinare la posizione de' primi è necessario supporre x, ovvero $-x$ infinita, dy infinitamente piccola rispetto a dx, ed inoltre che y abbia un valore finito, oppure $= 0$. Se y ha un valore finito a, la linea parallela all' asse delle ascisse, e distante da quest' asse della quantità a, sarà un assintoto. Se $y = 0$, sarà $a = 0$, e l' asse stesso sarà assintoto alla curva.

Similmente per determinare la posizione di un assintoto parallelo alle ordinate si dee supporre $\pm y$ infinita, dx infinitamente piccola rispetto a dy, e che x abbia un valore finito, ovvero $= 0$.

Dunque nella prima ipotesi dell' assintoto parallelo alla linea delle ascisse si farà $\frac{dx}{dy} = \infty$, ovvero $\frac{dy}{dx} = 0$, e

nella suppofizione dell' affintoto parallelo alle ordinate si farà invece $\frac{dx}{dy} = 0$, ovvero $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Per una curva il cui affintoto deve fare un angolo determinato coll' affe principale, o colle ordinate, come succede nell' iperbola, suppofta x infinita, fi cercherà il valore della fottangente PT, e da quefta fi fottrarrà l'afciffa x. Il refiduo farà il valore dell'intercetta AT (Fig.13.) comprefa tra l' origine A della curva e l'affintoto TM, e quindi condotta da A perpendicolarmente all'affe la retta AB, fi cercherà il valore della AB, per la cui eftremità B dovrà paffare l'affintoto.

LXVII.

PROBLEMA 14.° *Efaminare fe una data curva abbia qualche affintoto, e qualora l' abbia, determinarne la pofizione.*

Tralle fezioni coniche l' Ellifli ed il Circolo non hanno affintoto, perchè hanno rami finiti.

La Parabola ha bensì i rami indefiniti, ma la tangente condotta dall' eftremità della curva và ad incontrare l'affe ad una diftanza infinita dal vertice, mentre in quefta curva fi ha $PT = 2x$, ed $AT = 2x - x = x$, e pofta infinita l'afciffa x farà $AT = \infty$. Dunque quefta curva non ha affintoti.

Nell' iperbola, prefa l' equazione riferita al parametro $y = \left(px + \frac{pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, e a cagione dell' affintoto fupponendo $x = \infty$, farà $y = x\sqrt{\frac{p}{a}}$, poichè px fvanifce in confronto di $\frac{pxx}{a}$, e differenziando fi avrà $dy = dx\sqrt{\frac{p}{a}}$, e $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a}{p}}$, quantità che non può fupporfi infinita, ovvero eguale a zero

per essere a e p quantità finite. Dunque la curva non ha verun assintoto parallelo alle ascisse, od alle ordinate. Ma supponendo che l' assintoto faccia coll' asse principale un qualche angolo, sarà $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{a}}$ il valore della tangente di quest' angolo, e $\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$ quello di AT, il qual valore, posta x infinita, si ridurrà a $\frac{\frac{1}{2}ax}{x} = \frac{1}{2}a$.

Dunque l' assintoto dovrà passare pel centro della curva, cioè per la metà dell' asse principale.

All' origine A della curva (Fig. 13.) si alzi AB perpendicolare all' asse AP. Nel triangolo rettangolo ATB si avrà $\text{Cos}.T : \text{Sin}.T :: AT : AB = \frac{\text{Sin}.T}{\text{Cos}.T}.AT$; ma $\frac{\text{Sin}.T}{\text{Cos}.T} = \text{Tang}.T = \sqrt{\frac{p}{a}}$, ed $AT = \frac{1}{2}a$. Dunque $AB = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{p}{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$. Inoltre chiamando b l' asse conjugato, il quale, come consta dalle sezioni coniche, è una media proporzionale, tra l' asse principale, ed il parametro, sarà $b = \sqrt{ap}$, e quindi $AB = \frac{1}{2}b$. Dunque la retta TM, che passerà pel centro T, e per l' estremità B della AB perpendicolare nell' origine A all' asse principale, ed eguale al semiasse minore, sarà assintoto all' iperbola.

Sia la curva dell' equazione $(y-a)x = ab$.

Differenziando si trova $ydx + ydy - adx = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a-y}{x}$, e $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{a-y}$. Nella supposizione dell' assintoto parallelo alle ascisse si ha $\frac{dy}{dx} = 0$, cioè $\frac{a-y}{x} = 0$, dal

che si ricava $y = a$. Dunque in qualche punto A dell' asse AB della curva (Fig. 14.) alzata la perpendicolare $AD = a$, e da D condotta parallelamente allo stesso asse la DG, sarà questa un assintoto. Parimenti nel caso dell' assintoto parallelo alle ordinate si ha $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{a - y} = 0$, e quindi $x = 0$; cioè l' assintoto partirà dall' origine A delle ascisse, e sarà l' indefinita AC normale in A all' asse AB.

Sia la curva dell' equazione $y^m = x^m + a^{m-n} x^n$, e si cerchi in essa la posizione dell' assintoto inclinato all' asse.

Differenziando l' equazione, e sostituendo il valore di $\frac{dx}{dy}$ nella formola della sottangente $\frac{ydx}{dy}$, si trova $\frac{ydx}{dy} =$

$\frac{my^m}{mx^{m-1} + na^{m-n} x^{n-1}}$, ossia, rimettendo il valore di y^m, $\frac{ydx}{dy} =$

$\frac{mx^m + ma^{m-n} x^n}{mx^{m-1} + na^{m-n} x^{n-1}}$, laonde $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{(m-n) a^{m-n} x^n}{mx^{m-1} + na^{m-n} x^{n-1}}$;

Nel caso dell' assintoto inclinato all' asse, supposta x infinita, se $m - 1 < n$, x^{m-1} sarà infinitamente piccola rispetto ad x^{n-1}, e la formola si ridurrà a $\frac{(m-n)x^n}{nx^{n-1}} =$

$\frac{m-n}{n} \cdot x = \infty$. Dunque non vi sarà assintoto nella curva.

Se $m - 1 = n$, x^{n-1} svanirà dal denominatore della formola, questa diventerà $\frac{(m-n) a^{m-n} x^n}{mx^{m-1}} = \frac{a}{m}$, e vi sarà assintoto nella curva.

Finalmente ſe $m - 1 > n$ il numeratore ſarà infinitamente piccolo riſpetto al denominatore, cioè la formola potrà ſupporſi $= 0$, e l' aſſintoto alla curva avrà l' origine comune colle aſciſſe.



CAPO SETTIMO.

Della Frazione $\frac{0}{0}$, e delle Tangenti ai punti moltipli delle Curve.

LXVIII.

Nell' Analisi degli infinitamente piccoli, non meno che Algebra finita si danno certe formole scritte a modo di frazione, le quali, fatte certe sostituzioni, si riducono a $\frac{0}{0}$. La frazione $\frac{x^m - a^m}{a^n - a^n}$ ne porge un esempio, qualora si sostituisca a in luogo di x; poichè essa si riduce a $\frac{a^m - a^m}{a^n - a^n}$, cioè a $\frac{0}{0}$. Quale sarà adunque il valore di $\frac{0}{0}$.

Per procedere con qualche generalità sia $\frac{P}{Q}$ una frazione, in cui, essendo P, Q due diverse funzioni di x, fatto $x = a$, si abbia $\frac{0}{0}$.

Si differenzj a parte ciascun termine della funzione, e sia $dP = P'\,dx$, e $dQ = Q'\,dx$, essendo P', Q' due altre funzioni di x; sarà $\frac{dP}{dQ} = \frac{P'dx}{Q'dx} = \frac{P'}{Q'}$. In P', ed in Q' si sostituisca la quantità a invece di x, e ciò, che ne risulta, sarà il valore di $\frac{0}{0}$. Imperciocchè, potendosi assumere $P + dP$ invece di P, e $Q + dQ$ invece di Q, sarà $\frac{P}{Q} = \frac{P + dP}{Q + dQ}$; ma $dP = P'dx$, $dQ = Q'dx$, e nell' ipo-

tesi di $x = a$, P e Q si riducono a zero, dunque $\frac{P}{Q} = \frac{0+P'dx}{0+Q'dx} = \frac{P'}{Q'}$. Dunque, posto a in luogo di x in P', e Q', si avrà il valore della frazione $\frac{P}{Q}$, ossia di $\frac{0}{0}$.

Se dopo aver fatta la sostituzione di a in luogo di x, $\frac{P'}{Q'}$ si riduce ancora a $\frac{0}{0}$, con una seconda differenziazione del numeratore, e del denominatore si cercherà allo stesso modo una nuova frazione $\frac{P''}{Q''}$, in cui, posto a in luogo di x, si abbia il valore cercato. Se questa seconda differenziazione non basta, se ne potrà fare una terza, una quarta . . . ec.

Sia proposta la frazione $\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$, la quale, fatto $x = a$, si riduce a $\frac{0}{0}$. Paragonando questa frazione colla generale $\frac{P}{Q}$ si ha $P = x^m - a^m$, $Q = x^n - a^n$, onde $dP = mx^{m-1}dx$, $dQ = nx^{n-1}dx$, e $\frac{dP}{dQ} = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{n-1}dx} = \frac{m}{n}\, x^{m-n}$; cioè, posto a invece di x, sarà $\frac{m}{n}\, a^{m-n}$ il valore di $\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$, ossia di $\frac{0}{0}$.

La frazione $\frac{a^n - x^n}{\mathrm{l}.a - \mathrm{l}.x}$, fatto $x = a$, si riduce a $\frac{0}{0}$; dunque si faccia $P = a^m - x^m$, e $Q = \mathrm{l}.\, a - \mathrm{l}.\, x$. Sarà $dP = -nx^{n-1}dx$, $dQ = -\frac{dx}{x}$, e $\frac{dP}{dQ} = \frac{-nx^{n-1}dx}{-dx:x}$

$= nx^n$, e sostituendo a in luogo di x, sarà na^n il valore di $\frac{0}{0}$.

Sia la frazione $\frac{a^x - a^{-x}}{\mathrm{l.}(1-x)}$, quale si riduce a $\frac{0}{0}$ nella supposizione di $x = 0$. Differenziando il numeratore ed il denominatore si ha $\frac{dP}{dQ} = \frac{d(a^x - a^{-x})}{d\mathrm{l.}(1+x)} = \frac{a^x \mathrm{l.} a dx + a^{-x} \mathrm{l.} a dx}{dx : (1+x)}$ $= (a^x \mathrm{l.} a + a^{-x} \mathrm{l.} a)(1+x)$, e fatto $x = 0$ sarà $x^0 \mathrm{l.} a + x^0 \mathrm{l.} a\ (1+0) = 2\ \mathrm{l.} a$ il valore della frazione.

Similmente la frazione $\frac{2a\sqrt{(3ax^2 - 2a^3)} - 2x^2}{\sqrt{(2a^2 - x^2)} + x - 2a}$, supposto $x = a$, si riduce a $\frac{0}{0}$.

Dunque operando, come si è fatto negli esempj precedenti, si avrà $\frac{dP}{dQ} = \frac{4a^2 x dx (3ax^2 - 2a^3)^{-\frac{1}{2}} - 4x dx}{x dx (2a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + dx} =$ $\frac{4a^2 x (3ax^2 - 2a^3)^{-\frac{1}{2}} - 4x}{-x(2a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}$, e mettendo a in luogo di x sarà $\frac{dP}{dQ} = \frac{0}{0}$. Differenziando adunque di nuovo ciascun termine a parte si avrà quest' altra frazione $\frac{4a^2 dx (3ax^2 - 2a^3) - 16a^3 x^2 dx (3ax^2 - 2a^3)^{-\frac{3}{2}} - 4dx}{-dx (2a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2 dx (2a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}$, la quale, cancellando dx perchè si ritrova in ciascun termine, e mettendo a in luogo di x, si riduce a $8a$. Dunque $8a$ sarà il valore della frazione nel caso di $x = a$.

La frazione $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{\mathrm{l.} x}$, nel caso di $x = 1$, diventa

$\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$. Riducendo i termini allo steſſo denominatore, cioè ſcrivendo la frazione in queſta forma $\frac{x \, l.x - x + 1}{x \, l.x - l.x}$, differenziando ciaſcun termine, e riducendo, ſi avrà la nuova frazione $\frac{l.x}{1 + l.x - 1:x}$, la quale, poſto 1 invece di x, diventa ancora $\frac{0}{0}$.

Differenziando di nuovo la ridotta, dividendo per dx, e ſoſtituendo 1 ad x ſi avrà $\frac{1:x}{1:x + 1:x} = \frac{1}{2}$. Dunque $\frac{1}{2}$ ſarà il valore di $\frac{0}{0}$.

LXIX.

Qualora però dopo varie differenziazioni non rieſca di determinare il valore di $\frac{0}{0}$, ſi potrà uſare il metodo ſeguente.

Sia a quel valore di x, che riduce la frazione a $\frac{0}{0}$. In ciaſcun termine della data frazione in luogo di x ſi ſoſtituiſca $x + dx$, ovvero $x - dx$, e ſi riduca la formola ai minimi termini. Se queſta nuova frazione non dà il valore cercato, cioè, ſe poſto a in luogo di x, eſſa ſi riduce ancora a $\frac{0}{0}$, ſi ripeta la ſteſſa operazione una, due, 3...ec. volte. Alla fine ſi giugnerà ſicuramente ad una frazione della forma $\frac{Mdx^m}{Ndx^n}$, il cui valore ſarà o finito, ed eguale a $\frac{M}{N}$, o infinito, o infinitamente piccolo, ſecondo che m ſarà o eguale, o minore, o maggiore di n.

Per eſempio nella frazione $\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{(2aa - 3ax + xx)}}{\sqrt{(a - x)}}$, la quale nella ſuppoſizione di $x = a$ ſi riduce a $\frac{0}{0}$, diffe-

renziando il numeratore, ed il denominatore si troverà $\frac{dP}{dQ}=\frac{0}{0}$; $\frac{ddP}{ddz}=\frac{0}{0}$; $\frac{d^3P}{d^3Q}=\frac{0}{0}$; e così all'infinito. Per determinare adunque il valore della frazione $\frac{P}{Q}$ nel caso di $x=a$, si metta $a+dx$ in luogo di x, e si avrà la trasformata $\frac{\sqrt{(2aa-3a^2-3adx+a^2+2adx+dx^2)}}{\sqrt{a-a-dx}}$, la quale, mettendo a invece di x, e trascurando dx^2, si ridurrà, a $\frac{\sqrt{-adx}}{\sqrt{-dx}}=\sqrt{a}$, valore della frazione nel caso di $x=a$.

Parimenti nella frazione $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{l.x}$, mettendo $1+dx$ in luogo di x, si avrà la trasformata $\frac{1+dx}{dx}-\frac{1}{l.(1+dx)}$, ossia riducendo i termini allo stesso denominatore $\frac{(1+dx)\,l.(1+dx)-dx}{dx\,l.(1+dx)}$.
Ma $l.(1+dx)=dx(1-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{3}dx^2-$ ec.). Dunque sostituendo questo logaritmico sarà la nuova trasformata $\frac{(1+dx)dx(1-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{3}dx^2-ec.)-dx}{dx^2(1-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{3}dx-ec.)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}dx+ec.}{1-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{3}dx^2-ec.}$ che, trascurando tutti i termini infinitesimi, si ridurrà unicamente a $\frac{1}{2}$.

LXX.

Un problema analogo al precedente, ma puramente analitico, ed affatto indipendentemente dal calcolo differenziale si è quello in cui si cerca, *se una data formola scritta a foggia di frazione possa ridursi alla forma di* $\frac{0}{0}$, *e con quale sostituzione della variabile*.

Si eguaglj a zero separatamente il numeratore, ed il denominatore della data formola, e si cerchi in ciascuna

delle due equazioni il valore di x. E'chiaro, che se i due valori trovati saranno eguali, sostituiti nella formola la ridurranno alla richiesta espressione $\frac{0}{0}$. Oppure si eguagli a zero il più semplice fattore della frazione, in questa equazione si cerchi il valore di x, e questo si sostituisca nell' altro fattore. Se questo fattore si riduce al zero, il valore trovato sarà quello, che scioglierà il problema. Conchiudo con alcuni esempj presi dalle formole precedenti.

Nella formola $\frac{a^n - x^n}{\text{l.}a - \text{l.}x}$, posto $a^n - x^n = 0$, si ha $x = a$, e posto $\text{l.}a - \text{l.}x = 0$, si ha pure $x = a$. Dunque la formola è ridutibile a $\frac{0}{0}$ nel caso di $x = a$.

Nella formola $\frac{a^x - a^{-x}}{\text{l.}(1+x)}$ la supposizione di $a^x - a^{-x} = 0$ dà $a^x = a^{-x}$, onde $x\,\text{l.}a = -x\,\text{l.}a$, $x = -x$, ed $x = 0$. La supposizione di $\text{l.}(1+x) = 0$ dà $1+x = 1$, e $x = 0$, poichè 0 è il logaritmo dell' unità. Dunque la frazione si riduce a $\frac{0}{0}$ nel caso di $x = 0$.

Nella formola $\frac{x\,\text{l.}x - x + 1}{x\,\text{l.}x - \text{l.}x}$, facendo il denominatore $x\,\text{l.}x - \text{l.}x = 0$, si ha $x\,\text{l.}x = \text{l.}x$, e dividendo per $\text{l.}x$, $x = 1$: questo valore di x sostituito nel numeratore lo rende $= 0$. Dunque 1 è quel valore che riduce la formola a $\frac{0}{0}$.

Similmente nella formola $\frac{2a(3ax^2 - 2a^3)^{\frac{1}{2}} - 2x^2}{(2a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x - 2a}$ eguagliando il denominatore a zero, togliendo il radicale, e riducendo, si ha l' equazione quadratica $x^2 + 2ax + a^2 = 0$, la cui radice è $x - a = 0$, ossia $x = a$. Questo valore sostituito nel numeratore lo fa svanire: dunque esso riduce la formola a $\frac{0}{0}$.

LXXI.

Sia *SOMZM′ON″* (Fig. 15.ª) una curva i cui rami s' incontrano in qualche punto *O* chiamato *Punto multiplo* della curva. Sia *AR* la linea delle ascisse, *AZ* quella delle ordinate. Sulla prima prendansi diverse ascisse *AP*, *AR*; sulla seconda diverse ordinate *AQ*, *AZ*, e si menino le coordinate corrispondenti *PM*, *PM′*, *RO*, *ec.* *QN*, *QN′*, *QN″*, *ZO* ec.

Dalla semplice ispezione della figura è evidente 1.° che a ciascun ascissa *AP* presa sulla *AR* corrisponde, almeno dentro un certo limite, un certo numero d' ordinate *PM*, *PM′*. 2° Che quelle tra queste ordinate, le quali corrispondono al punto multiplo *O*, dove i rami della curva s' incontrano, si eguagliano tra loro, e si confondono in una sola. 3.° Che a ciascun ordinata *AQ* presa sulla *AZ* corrisponde parimente un certo numero di ascisse *QN*, *QN′*, *QN″*, e che quelle tra queste ascisse, le quali corrispondono allo stesso punto *O*, si euagliano tra loro, e si compenetrano in una sola *OZ*.

Ciò posto si chiami a il valore dell' ascissa x, e b quello dell' ordinata y nel punto multiplo *O*. L' equazione alla curva deve esser tale, che, posto a in luogo di x, si abbiano tanti valori di y tutti eguali a b quanti sono i rami, che s' incontrano in *O*, e che, posto b in luogo di y, si abbia lo stesso numero di valori x tutti eguali ad a. Cioè l' equazione alla curva deve potersi ridurre alla forma

$$(x-a)^m A+(x-a)^{m-1}(y-b)B+(x-a)^{m-2}(y-b)^2 C+ (x-a)^{m-3}(y-b)^3 D \ldots\ldots + (y-b)^m T = 0,$$

dinotando $A, B, C, \ldots\ldots T$ delle funzioni qualunque di

x, y e costanti, ed m il grado di multiplicità, ossia il numero dei rami della curva, che passano pel punto O. Imperciocchè in quest' equazione, supposto $x = a$, svaniscono tutti i termini affetti dal fattore $x - a$, ed essa si riduce a $(y-b)^m T = 0$, ossia $(y-b)^m = 0$, la qual equazione è il prodotto di un numero m d' equazioni semplici ed eguali ad $y - b = 0$; cioè di un numero m di valori y tutti eguali a b. Lo stesso si dica rispetto al valore $y=b$. In tal caso l' equazione si riduce ad $(x-a)^m = 0$, dove i fattori essendo m in numero, ed eguali all'equazione semplice $x - a = 0$, si ha un egual numero di valori di x tutti eguali ad a.

Supponendo ora che la predetta equazione venghi differenziata m volte di seguito col riguardare le infinitesime dx, dy o come variabili, o come costanti, e considerando attentamente le varie equazioni differenziali ottenute deve sembrar manifesto.

1.° Che non v' è che l' ultima tra queste equazioni, la quale abbia qualche termine non affetto dai fattori $x-a$, $y-b$.

2.° Che trovandosi nella curva qualche punto multiplo, debbono svanire tutte le predette equazioni, o differenze, eccetuata l'ultima, quando in luogo di x, e di y venghino sostituiti i valori a, b corrispondenti a questo punto.

3.° Che in quest' ultima equazione differenziale tutti i termini, eccettuati quelli, nei quali entrano dx^m, e dy^m, sono affetti da qualche potenza di $(x-a)$, e $(y-b)$; e che perciò dopo la sostituzione, la medesima equazione ridurrassi alla forma di $dx^m P + dy^m Q = 0$, in cui P, e Q saranno ancora funzioni di x, y e costanti non affette dai

fattori $x-a$, e $y-b$. Finalmente, che da nissuna delle accennate equazioni, fuorchè dall' ultima, si può avere il valore di $\frac{dx}{dy}$ non altrimenti espresso che per $\frac{0}{0}$. Comproviamo tutto ciò con un esempio; e sia la curva dell' equazione $a(x-a)^2 - b(y-b)^2 = 0$.

Differenziando due volte quest' equazione si ha

1.° $2adx(x-a) - 2bdy(y-b) = 0$.

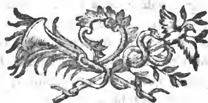
2.° $2adx^2 + 2addx(x-a) - 2bdy^2 - 2bddy(y-b) = 0$.

Fatto $x = a$, ed $y = b$, la prima di queste due equazioni svanisce interamente, e la seconda si riduce a $2adx^2 - 2bdy^2 = 0$, donde si ricava $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$, e $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{b}{a}}$, e sostituendo nella formola delle tangenti si ha $\frac{ydx}{dy} = \pm b\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$. Questo doppio valore dinota due tangenti al punto multiplo delle curve, le quali appartengono a due rami, che quivi s'incontrano.

LXXII.

Quindi per determinare se una curva, di cui si conosce l' equazione, abbia uno o più punti multipli, in qual parte del suo perimetro si trovino questi punti, e quanti rami passino per ciascun de' medesimi, si differenzj la di lei equazione, si eguagli a zero separatamente la somma dei termini affetti da dx, e quella dei termini affetti da dy, e da queste due equazioni insieme combinate si cavino i valori di x, e y, che competono all' uno ed ai più punti multipli della curva. Per assicurarsi però dell' esistenza di tali punti, e per determinarne il grado di multiplicità in ciaf-

con d'essi. Si esamini prima se i trovati valori di x ed y, sostituiti nella data equazione, facciano svanire ogni quantità: in tal caso si differenzj di nuovo l' equazione della curva, trattando per maggior brevità dx, e dy come costanti, e in questa seconda equazione differenziale si sostituiscano i valori di x, ed y. Se dopo questa sostituzione non svaniscono tutti i termini dell' equazione, il punto multiplo non è che doppio, cioè per esso non passano che due soli rami della curva; ma se tutti que' termini svaniscono il punto è più che doppio; perciò si passi ad una terza differenziazione, supponendo sempre costanti dx, e dy, ed avendo sostituiti nella nuova equazione differenziale i valori di x ed y, il punto sarà triplo, quando non tutti i termini svaniscono, e più che triplo, quando svaniscono tutti. Si prosegua quindi a differenziare ed a sostituire i soliti valori, fino a che si arrivi ad un equazione, i cui termini dopo la sostituzione non svaniscono interamente. Il grado di differenziazione di quest' equazione, indicherà quello di multiplicità del punto cercato.



CAPO OTTAVO.

De' Massimi, e de' Minimi.

LXVI.

Se la legge, per cui una quantità variabile è prodotta, eſige, che queſta quantità creſca, ovvero decreſca ſino ad un certo ſegno per poi immediatamente ſcemare o creſcere, la quantità variabile pervenuta a queſto punto di maggiore o di minore grandezza prende il nome di *Maſſimo* o di *Minimo*, ed il Metodo analitico, col quale ſi determina il di lei valore, oppure quello di una qualche ſua funzione in queſto punto, ſi chiama *Metodo* de' *Maſſimi*, e de' *Minimi*.

LXXIV.

Sia y una funzione di x, la quale, per qualunque valore ſi ſoſtituiſca ad x, riceva ſempre un valore reale, e ſi indichi per x quel valore della ſteſſa x, che riduce la y ad un maſſimo, ovvero ad un minimo. E' manifeſto che ſe ad x ſi ſoſtituiſca $x + \varphi$, ovvero $x - \varphi$, ſupponendo φ una quantità molto piccola, la corriſpondente funzione ſarà minore di y, quando queſto ſia un maſſimo, e maggiore di y, quando y ſia un minimo.

Poſto adunque $x \pm \varphi$ in luogo di x, la funzione y diventerà (Art. XXXV.) $y \pm \frac{\varphi dy}{dx} + \frac{\varphi^2 ddy}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3 d^3 y}{6dx^3}$ $+$ ec., e però nel caſo del maſſimo valore di y dovrà eſſere

y

$$y > y \pm \frac{\varphi\, dx}{dx} + \frac{\varphi^2\, ddy}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3\, d^3 y}{6dx^3} + \text{ec.}$$

e pel caſo del minimo

$$y < y \pm \frac{\varphi\, dy}{dx} + \frac{\varphi^2\, ddy}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3\, d^3 y}{6dx^3} + \text{ec.}$$

Cioè, traſcurando tutti i termini in cui entra qualche potenza della piccoliſſima quantità φ, ſarà pel primo caſo $y > y \pm \frac{\varphi\, dy}{dx}$, e pel ſecondo $y < y \pm \frac{\varphi\, dy}{dx}$.

Ma nel caſo di un maſſimo o di un minimo ſvaniſce ancora la quantità $\pm \frac{\varphi\, dy}{dx}$, poichè la formola ſi riduce alla ſola y. Dunque per conoſcere ſe una funzione comunque compoſta di variabili e coſtanti poſſa ridurſi ad un maſſimo, oppure ad un minimo, ſi faccia eſſa eguale ad y, ſi differenzj, e ſi cavi il valore di $\frac{dy}{dx}$. Queſto valore ſi eguaglj a zero, e dalla formata equazione ſi elimini la x. Il trovato valore di x ſarà quello, che renderà maſſima o minima la funzione data, qualora eſſa ſia ſuſcettibile di tale ſtato. La ragione di ciò ſi è, che nel caſo di un maſſimo o di un minimo, dovendo eſſere $\frac{\varphi\, dy}{dx} = 0$, ſarà pure $\frac{dy}{dx} = 0$, onde ec. (*).

M

(*) Dall' equazione $\frac{dy}{dx} = 0$, moltiplicando per dx, ſi ha $dy = 0$. Cioè nel punto di maſſimo, o di minimo, il differenziale della variabile è zero. Dunque in queſto punto la variabile può riguardarſi come coſtante.

LXXV.

Non è però così facile il conoscere se l' ottenuto valore di x corrisponda ad un massimo, oppure ad un minimo; anzi non di rado accade, che questo valore di x, quantunque sia $\frac{dy}{dx} = 0$, non appartiene nè all' uno, nè all' altro.

Sia f il valore, ovvero uno trai valori di x che si ottengono dall'equazione $\frac{dy}{dx} = 0$; questo valore si sostituisca in ciascuna delle espressioni $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, ec., e si faccia $\frac{ddy}{dx^2} = p$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4 y}{dx^4} = r$, ec. Sarà la funzione trasformata $y + \frac{1}{2}\varphi^2 p \pm \frac{1}{6}\varphi^3 q + \frac{1}{24}\varphi^4 r \pm$ ec.

Ora se p è quantità positiva, trascurando tutti i termini della formola dopo $\frac{1}{2}\varphi^2 p$ come assai piccoli, la stessa formola si ridurrà ad $y + \frac{1}{2}\varphi^2 p$, cioè ad uno stato maggiore di y, e perciò y sarà un minimo.

Se p è negativa, sarà invece la formola $y - \frac{1}{2}\varphi^2 p$, quantità minore di y, il che indica, che y sarà un massimo.

Se p è zero la stessa formola diventerà $y \pm \frac{1}{6}\varphi^3 q + \frac{1}{24}\varphi^4 r \pm$ ec., in cui se q non è zero, non si avrà nè un massimo, nè un minimo: poichè se q non è zero, qualunque sia o positivo, o negativo il valore di q, ommessi tutti i termini al di là di $\frac{1}{6}\varphi^3 q$, nel caso del massimo sarà $y \pm \frac{1}{6}\varphi^3 q < y$, e nel caso del minimo $y \pm \frac{1}{6}\varphi^3 q > y$, il che evidentemente ripugna a motivo del doppio segno, non potendo mai essere nè $y + \frac{1}{6}\varphi^3 q < y$, nè $y - \frac{1}{6}\varphi^3 q > y$.

Sia adunque $q = 0$, e la formola diventi $y + \frac{1}{24}\varphi^4 r \pm$ ec.

Se r è poſitiva ſarà $y + \frac{1}{24} \varphi^4 r > y$; cioè y ſarà un minimo.

Se r è negativa ſarà $y - \frac{1}{24} \varphi^4 r < y$, ed y ſarà un maſſimo.

Ma ſe ancora r è zero, il giudizio dovrà riportarſi alla lettera ſeguente s, e ſarà del tutto ſimile al di già fatto in riguardo alla lettera q; cioè ſe s non ſarà eguale a zero, non avraſſi alcun maſſimo o minimo, e ſe s ſarà $=$ o, la funzione y ſarà un minimo, o un maſſimo, ſecondo che la ſeguente lettera t ſarà poſitiva, o negativa. Che ſe ancora t ſia $=$ o, ſi dovrà proſeguire collo ſteſſo criterio, e formare il giudizio della ſeguente lettera, e così in poi.

LXXVI.

Dunque in generale, giunti al differenziale $\frac{\varphi^m d^m y}{dx^m}$ che non iſvaniſce, ſe m ſarà numero diſpari non ſi avrà alcun maſſimo o minimo, e ſe m ſarà numero pari ſi avrà o un maſſimo, o un minimo, ſecondochè $\frac{\varphi^m d^m y}{dx^m}$ ſarà o negativo, o poſitivo.

LXXVII.

Ciò però dee unicamente intenderſi, allora che la ritrovata funzione ſia poſitiva. Che ſe queſta ſarà negativa, ſi avrà invece un maſſimo negativo, quando l' ultimo differenziale, che non iſvaniſce, ſarà poſitivo, ed un minimo negativo, quando queſto differenziale ſarà negativo.

LXXVII.

PROBLEMA 1.° *Determinare i casi, nei quali una funzione della forma di* $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3}$ . . . . . . $+ M$ *può diventar massima, o minima.*

1.° Sia la proposta funzione $x^2 + ax + b$.

Si faccia $x^2 + ax + b = y$.

Sarà $\frac{dy}{dx} = 2x + a$

$\frac{ddy}{2dx^2} = 1$,

e posto $\frac{dy}{dx}$, ossia $2x + a = 0$, avrassi $x = -\frac{1}{2}a$, e la funzione sarà un minimo, poichè $\frac{ddy}{2dx^2}$, ha un valore positivo; così, sostituendo il valore di x, sarà questa funzione minima $y = b - \frac{1}{4}a^2$.

2.° Sia la funzione $x^3 - ax^2 + bx + c$.

Posto $x^3 - ax^2 + bx + c = y$.

Sarà $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b$

$\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - a$

e fatto $3x^2 + 2ax - b = 0$ si troverà $x = \frac{1}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{(aa - 3b)}$, valore per cui la formola non potrà ridursi nè ad un massimo, nè ad un minimo, quando non sia $aa < 3b$; poichè se $aa < 3b$, il radicale sarà immaginario, e se $aa = 3b$, sarà $\sqrt{(aa - 3b)} = 0$, onde $x = \frac{1}{3}a$, e $\frac{ddy}{2dx} = 0$. Ma $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$, cioè $\frac{d^3y}{6dx^3}$ non è zero. Dunque in questo caso non si avrà verun massimo, o minimo.

Se $aa < 3b$, farà reale il valore di $\sqrt{(aa - 3b)}$, e fostituendo il valore di x, avraffi $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm \sqrt{(aa - 3b}$. Dunque la formola farà un minimo quando, $x = \frac{1}{3}a + \sqrt{(aa - 3b)}$, poichè $\frac{ddy}{2dx^2}$ farà pofitivo, e un maffimo, quando $x = \frac{1}{3}a - \sqrt{(aa - 3b)}$, poichè $\frac{ddy}{2dx^2}$ farà negativo.

3.° Sia $x^4 - \frac{28}{3}x^3 + 28x^2 - 32x + 1 = y$

Sarà $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 28x^2 + 56x - 32$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x^2 - 28x + 28$$

e formando l'equazione $4x^3 - 28x^2 + 56x - 32 = 0$, e rifolvendo fi otteranno le tre radici $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$.

Per la prima di quefte radici fi avrà $\frac{ddy}{2dx^2} = 6$, dunque la funzione corrifpondente a quefto valore di x, cioè $y = -11\frac{1}{3}$, farà un maffimo negativo.

Per la feconda radice fi avrà $\frac{ddy}{2dx^2} = -4$, e la corrifpondente funzione $y = -9\frac{2}{3}$ farà un minimo negativo.

Per la terza fi avrà $\frac{ddy}{2dx^2} = 12$, e perciò la funzione ritornerà maffima negativa, e farà $y = -20\frac{1}{3}$.

4.° Abbiafi per ultimo la funzione $x^6 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 1 = y$. Sarà $\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 12x^4 - 6x^3 - 12x^2$.

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 15x^4 - 24x^3 + 9x^2 - 12.$$

Si formi l'equazione $6x^5 - 12x^4 - 6x^3 - 12x^2 = 0$, offia $x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$, quale rifolta nei fattori

$x^2(x^2+1).(x-2)=0$, darà due radici eguali $x=0$, due immaginarie comprese nel fattore $x^2+1=0$, ed una reale $x-2=0$.

Le due radici eguali, e le due immaginarie sono superflue, perchè non possono ridurre la funzione nè ad un massimo, nè ad un minimo. L'ultima radice $x=2$ sostituita dà $\frac{ddy}{2dx^2}=72$: dunque essa riduce la funzione ad un massimo negativo, che sarà $y=-19\frac{4}{5}$.

LXXIX.

Dai recati esempj s' inferisce 1.° che la determinazione dei massimi, e dei minimi in una data formola dipende dalle radici dell' equazione $\frac{dy}{dx}=0$, cioè che tutti i massimi e minimi della formola generale $y=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3} \ldots\ldots + M$ dipendono dalle radici dell'equazione $mx^{m-1}+\overline{m-1}.Ax^{m-2}+\overline{m-2}.Bx^{m-3}+\overline{m-3}.Cx^{m-4}+\ldots\ldots=0$, in cui il massimo esponente di x è minore di un unità dell' esponente massimo nella data.

2.° Che la medesima funzione non può avere alcun massimo, o minimo, quando i differenziali di grado impari $\frac{d^1y}{dx^1}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^7y}{dx^7}$; ec. dopo le sostituzioni non si riducano al zero.

3.° Che si avrà sicuramente qualche massimo, o minimo, quando questi differenziali si annulleranno, ossia quando l' ultimo differenziale, che svanisce dopo le sostituzio-

ni, sarà di grado impari, e che le radici della prima equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = 0$ non saranno tutte nè eguali, nè immaginarie.

4.° Che una funzione potrà avere più massimi, e più minimi, e ciascun massimo potrà essere indistintamente o maggiore, o minore di ciascun minimo, e viceversa; poichè ad esser massima o minima una funzione null' altro si racchiude, fuorchè ella sia maggiore o minore delle funzioni, che la comprendono immediatamente.

5.° Che se l' equazione $\frac{dy}{dx} = 0$ avrà un numero di radici eguali, non si avrà verun massimo, o minimo, quando questo numero sia pari, e si avrà un sol massimo, od un sol minimo, quando sia dispari.

LXXX.

PROBLEMA 2.° *Cercare tutti i massimi, e minimi possibili nella frazione della forma* $\frac{P}{Q}$, *in cui P e Q sono funzioni razionali di x.*

Sia la frazione $\frac{x}{1+xx}$.

Facendo $y = \frac{x}{1+xx}$, e differenziando si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xx}{(1+xx)^2}$, e $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-6x + 2x^3}{(1+xx)^3}$. Quindi formando l' equazione $\frac{1+xx}{(1+xx)^2} = 0$, e risolvendo si ottiene $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$. Il valore positivo $+1$ riduce la funzione ad un massimo positivo, poichè sostituito dà $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{2}$, ed $y = \frac{1}{2}$.

Il valore negativo -1 sostituito dà $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1}{2}$, ed $y = -\frac{1}{2}$; onde riduce la stessa funzione ad un massimo negativo.

Sia la frazione $y = \frac{2 - 3x + xx}{2 + 3 + xx}$.

Differenziando si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{-12 + 6xx}{(2 + 3x + xx)^2}$, e $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{72 + 72x - 12x^3}{2 + 3x - xx)^3}$. Quindi $\frac{-12 + 6xx}{(2 + 3x + xx)^2} = 0$, ed $x = \pm\sqrt{2}$.

Dal valore $+\sqrt{2}$ si ricava $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{72 + 48\sqrt{2}}{(4 + 3\sqrt{2})^3}$, ed $y = -0,0294$, massimo negativo. Dal valore $-\sqrt{2}$ si ottiene $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{72 - 48\sqrt{2}}{(4 - 3\sqrt{2})^3}$, quantità negativa, poichè $72 > 48\sqrt{2}$, e $4 < 3\sqrt{2}$; Dunque $y = -33,971$ minimo negativo.

LXXXI.

Alla stessa maniera si potranno cercare tutti i massimi, e minimi possibili di una funzione della forma $(x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . + M)^n$, qualunque sia l' esponente n. Mentre, eguagliando questa funzione ad y, e differenziando, si avrà

$$\frac{dy}{dx} = n(x^m + Ax^{m-1} Bx^{m-2} \; . \; . \; . + M)^{n-1} (mx^{m-1} + \overline{m-1}\; Ax^{m-2} + \overline{m-2}\; Bx^{m-3} \; . \; . \; . \; . \; . + P) = 0;$$

e

e quindi l'equazione $mx^{m-1} + \overline{m-1}\, Ax^{m-2} + \overline{m-2}\, Bx^{m-3}$ . . . . . $+ P = 0$, le cui radici daranno tutti i massimi e minimi possibili.

LXXXII.

PROBLEMA 3.° *Data l' equazione ad una curva cercare a qual punto dell' asse corrisponda la massima o minima ordinata y, ed il di lei valore in questo punto.*

Sia la curva dell' equazione $y = (a+b)\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2x}$.

Differenziando si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{a} - \frac{a^2}{2x^2}$, $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{a^2}{2x^3}$, e facendo $\frac{a+b}{a} - \frac{a^2}{2x^2} = 0$, si trova $x = \pm a\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)}$ il qual valore, sostituito nel secondo differenziale, dà $\frac{ddy}{2dx^2}$ $= \pm \frac{1}{2a\left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{3}{2}}}$; il segno superiore indica un minimo, e l' inferiore un massimo.

Dunque la curva ha un' ordinata minima positiva $= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+ab)}$, alla quale corrisponde l' ascissa $a\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)}$, ed un ordinata massima negativa $= -\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+ab)}$ corrispondente all' ascissa negativa $-a\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)}$.

Sia la curva un' Ellissi, od un circolo di genere superiore, la cui equazione differenziata si è (XLIX)

$$dy = \frac{1}{m+n}\left(x^{m}\cdot\overline{a-x}^{n}\cdot\frac{a}{p}\right)^{\frac{1}{m+n}} \frac{m\cdot\overline{a-x} - nx}{ax - xx}\, dx.$$

Eguagliando a zero questo differenziale, e dividendo per $\frac{1}{m+n}\left(x^m . \overline{a-x}^n . \frac{p}{a}\right) dx$ si avrà l' equazione $\frac{ma - mx - nx}{ax - xx}$ $= 0$, dalla quale ricaverassi $x = \frac{ma}{m+n}$.

Nell' ellissi e nel circolo comune, in cui $m = n = 1$, sarà $x = \frac{a}{2}$.

Dunque sostituendo questo valore, l' ordinata massima sarà $\frac{1}{2}\sqrt{ap}$.

Ma nell' Ellissi $\frac{1}{2}\sqrt{ap}$ è il valore del semiasse conjugato, e nel circolo $p = a$. Dunque in ciascun d' essi sarà $y = \frac{1}{2}a$. Cioè la massima ordinata nell' Ellissi corrisponderà alla metà dell' asse maggiore, e sarà eguale all' asse minore, e nel circolo sarà lo stesso suo raggio.

In un dato circolo sia $2a$ il diametro, x qualunque ascissa computata dal vertice, ed y l' ordinata corrispondente. Il diametro $2a$ sia ancora asse di una curva, di cui ciascun ordinata z sia media tralle corrispondenti coordinate al circolo x, y: determinare la massima ordinata in questa curva.

Nel circolo si ha $yy = 2ax - xx$, e nella curva $zz = xy$. Dunque differenziando la prima equazione sarà $dy = \frac{adx - xdx}{y}$, e differenziando la seconda sarà $dz = \frac{ydx + xdy}{2z}$, ovvero, sostituendo il valore di dy, e riducendo, $dz = \frac{y^2 dx + axdx - xxdx}{2zy}$. Ma, a motivo della massima ordinata z, sarà zero il valore di dz, cioè sarà $\frac{y^2 dx + axdx - xxdx}{2zy}$ $= 0$. Dunque, moltiplicando ciascun membro per $2zy$, so-

ſtituendo invece di y^2 il ſuo valore $2ax - xx$, e liberando la x, ſarà $x = \frac{3a}{2}$.

Dunque la maſſima ordinata corriſponderà ai $\frac{3}{4}$ del diametro $2a$, e ſarà $\frac{a}{2}\sqrt[4]{27}$.

Sia finalmente la curva dell' equazione $xy = xx + aa$.

Differenziando ſi ha $dy = dx - \frac{a^2 dx}{x^2} = 0$, onde $x^2 - a^2 = 0$, ed $x = \pm a$.

Differenziando di nuovo per vedere a che corriſponda ciaſcuno di queſti valori di x ſi ha $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{a^2}{x^3}$, cioè, mettendo il valore di x, $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm \frac{1}{a}$.

Dunque il ſegno ſuperiore indica un minimo poſitivo, e l' inferiore un minimo negativo, perchè nel 1.° caſo ſi ha $y = 2a$, e nel 2.° $y = -2a$.

LXXXIII.

PROBLEMA 4.° *Dividere una data quantità* a *in parti* n *per modo che il loro prodotto ſia un maſſimo.*

Sia $n = 2$, ſi chiami x una delle due parti; ſarà $a - x$ l'altra parte, ed $ax - xx$ il prodotto loro. Il differenziale di queſto prodotto nel caſo del maſſimo deve eſſere zero. Dunque ſarà $adx - 2xdx = 0$; e riſolvendo $x = \frac{1}{2}a$, ed $a - x = \frac{1}{2}a$.

Cioè la quantità a dovrà eſſer diviſa in due parti eguali.

Sia $n = 3$, e ſi chiami x la prima parte, y la ſeconda, $a - x - y$ la terza.

Sarà $ayx - x^2 y - xy^2$ il prodotto di queste tre parti, ed $aydx + axdy - 2xydx - x^2 dy - 2xydy - y^2 dx$ il differenziale di questo prodotto.

Nel caso del massimo prodotto svanirà questo differenziale: dunque, eguagliando a zero la somma di tutti i termini, che contengono il differenziale della medesima variabile, si avranno le due equazioni

$$aydx - 2yxdx - y^2 dx = 0$$

$$axdy - x^2 dy - 2yxdy = 0$$

Dalle quali si ricaveranno i tre valori $x = \frac{1}{3} a$, $y = \frac{1}{3} a$, $a - x - y = \frac{1}{3} a$.

Dunque la quantità a dovrà dividersi in tre parti eguali.

Sia $n = 4$, e siano le quattro parti x, y, z, $a - x - y - z$.

Il loro prodotto sarà $axyz - x^2 yz - xy^2 z - xyz^2$, ed il differenziale di questo prodotto

$$\begin{aligned} & ayzdx + axzdy + axydz \\ & - 2xyzdx - x^2 zdy - x^2 ydz \\ & - y^2 zdx - 2xzydy - xy^2 dz \\ & - yz^2 dx - xz^2 dy - 2xyzdz \end{aligned}$$

Quindi eguagliando a zero le somme dei termini, che comprendono i differenziali delle stesse variabili, si avranno le tre seguenti equazioni

$$ayzdx - 2xyzdx - y^2 zdx - yz^2 dx = 0,$$

$$axzdy - x^2 zdy - 2xyzdy - xz^2 dy = 0,$$

$$axydz - x^2 ydz - xy^2 dz - 2xyzdz = 0,$$

Dalle quali si caverà $x = \frac{1}{4} a$, $y = \frac{1}{4} a$, $z = \frac{1}{4} a$, $a - x - y - z = \frac{1}{4} a$.

Dunque la quantità dovrà esser divisa in quattro parti eguali.

Se n sarà eguale a 5, a 6, a 7, ec., operando come finora si è fatto, si troverà che la quantità a dovrà dividersi in 5, in 6, in 7, ec. parti eguali.

LXXXIV.

PROBLEMA 5.° *Dividere una data quantità a in parti n, per modo che, chiamando x, y, z..... ec. queste parti, il prodotto $x^m y^p z^q$ ...... ec. sia un massimo.*

Sia $n = 2$. Saranno le due parti x, $a - x$, ed il richiesto prodotto $x^m (a-x)^p$. Il differenziale di questo prodotto eguagliato a zero darà l' equazione $mx^{m-1}(a-x)^p dx - px^m (a-x)^{p-1} dx = 0$; onde, dividendo pel fattore comune, e liberando la x, sarà $x = \frac{am}{m+p}$, ed $a - x = a - \frac{am}{m+p} = \frac{ap}{m+p}$.

Sia $n = 3$. Saranno le 3 parti $x, y, a - x - y$, il prodotto cercato $x^m y^p (a-x-y)^q$, ed il differenziale di questo prodotto $mx^{m-1} y^p (a-x-y)^q dx + px^m y^{p-1} (a-x-y)^q dy - qx^m y^p (a-x-y)^{q-1} dx - qx^m y^p (a-x-y)^{q-1} dy = 0$. Eguagliando a zero ciascuna somma di termini, che contengono lo stesso differenziale, si avranno le due equazioni

$$mx^{m-1} y^p (a-x-y)^q dx - qx^m y^p (a-x-y)^{q-1} dx = 0,$$

$$px^m y^{p-1} (a-x-y)^q dy - qx^m y^p (a-x-y)^{q-1} dy = 0,$$

dalle quali si avrà $x = \frac{ma - my}{m+q}$

ed $x = \frac{pa - py - qy}{p}$.

Questi due valori di x paragonati fra loro daranno $y = \frac{ap}{m+p+q}$; onde $x = \frac{am}{m+p+q}$, ed $a - x - y = \frac{aq}{m+p+q}$.

Sia $n = 4$. Le parti faranno x, y, z, $a - x - y - z$; Quindi il cercato prodotto farà $x^m y^p z^q (a - x - y - z)^r$, ed operando come si è fatto nei due esempj precedenti, e chiamando t la somma degli esponenti m, p, q, r, si troverà $x = \frac{am}{t}$, $y = \frac{ap}{t}$, $z = \frac{aq}{t}$, ed $a - x - y - z = \frac{ar}{t}$. Cioè ciascuna parte sarà eguale al prodotto di a nel suo esponente diviso per la somma di tutti gli esponenti, e le parti staranno nella ragione dei loro esponenti rispettivi.

Lo stesso si troverà per qualunque altro numero di parti. Se gli esponenti m, n, p, q....ec. saranno tra loro eguali, ciascuna parte sarà $\frac{1}{n} a$; cioè le parti x, y, z..... ec. saranno tutte eguali tra loro.

LXXXV.

PROBLEMA 6.° *Da un punto dato ovunque nel piano di una curva condurre alla stessa curva la retta più corta.*

Sia AM questa curva (Fig. 16.), ed AZ il suo asse.

1.° Il dato punto sia nell' asse AZ, siccome in Q, e sia M quel punto, in cui la retta cercata MQ deve incontrare la curva.

Dal punto M s' intenda abbassata all' asse la perpendicolare MP, e si faccia $AQ = a$, $AP = x$, $PM = y$, $MQ = z$. Sarà $PQ = a - x$, $\overline{MQ}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2$, ossia $z^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, e differenziando $dz = \frac{2ydy + 2xdx - 2adx}{2z} = 0$, poichè z deve essere un minimo. Dunque $\frac{ydy}{dx} = a - x = PQ$; ma $\frac{ydy}{dx}$ è la formola della

sottonormale: dunque PQ è sottonormale, e la retta cercata MQ normale alla curva.

2.° Il punto sia nell' area della curva, e sia R.

Supposta la retta cercata MRQ, le RV, MP perpendicolari all'asse, e la NR parallela allo stesso asse, si faccia $AV = b$, $RV = NP = c$, ed $MR = z$; sarà $MN = y - c$, $RN = PV = b - x$, ed $\overline{MR}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NR}^2$, ossia $z^2 = y^2 - 2cy + c^2 + b^2 - 2bx + x^2$, il cui differenziale eguagliato a zero darà $dz = \frac{2ydy - 2cdy - 2bdx + 2xdx}{2z} = 0$, quindi $\frac{dy}{dx} = \frac{b-x}{y-c}$, ed $\frac{ydx}{dx} = \frac{(b-x)y}{y-c}$. Ma $MN:NR::MP:PQ$, ovvero $y - c : b - x :: y : PQ = \frac{(b-x)y}{y-c} = \frac{ydy}{dx}$. Dunque MR è normale alla curva.

3.° Il punto sia fuori dell' area della curva, e sia S.

Abbassata all' asse la perpendicolare SB, e concepita la MO parallela all'asse si faccia $SB = c$, $AB = g$, $MO = BP = x - g$, $SO = c - y$, $SM = z$; sarà $z^2 = c^2 - 2cy + y^2 + x^2 - 2gx + g^2$; onde $dz = \frac{2ydy - 2cdy + 2xdx - 2gdx}{2z} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x-g}{c-y}$, e $\frac{ydy}{dx} = \frac{(x-g)y}{c-y}$; Ma $SO:OM::MP:PQ$. Dunque sostituendo i valori sarà $PQ = \frac{(x-g)y}{c-y} = \frac{ydy}{dx}$. Cioè la linea più corta sarà la normale SM, come ne' due casi precedenti.

Lo stesso si dimostra, quando il dato punto sia fuori dell' area della curva verso T.

LXXXVI.

PROBLEMA 7.° *Data la base di un triangolo ACB* (Fig. 17), *e la somma dei due lati sopra di essa determinare questi due lati in guisa, che il triangolo abbia la massima superficie.*

Si chiami b la base AB, a la somma dei due lati AC, BC, x il maggiore lato AC, $a - x$ l' altro lato BC, e si abbassi dal vertice C la perpendicolare CD sopra la base AB, prolungata se abbisogna.

E' proprietà d' ogni triangolo, che abbassata da uno dei tre angoli una perpendicolare CD sopra l' opposta base AB, questa stia alla somma degli altri due lati AC, BC nel rapporto della differenza dei medesimi due lati, alla differenza, od alla somma dei segmenti AD, BD formati dalla CD nella base AB, secondochè CD cade o dentro l'area del triangolo, o fuori di essa sulla base prolungata.

Dunque si avrà $b : a :: 2x - a : AD \mp BD = \frac{2ax - aa}{b}$, ossia $2AD - AB = \frac{2ax - aa}{2b}$; quindi $AD = \frac{2ax - aa + bb}{2b}$, e $CD = \sqrt{\left(x^2 - \left(\frac{2ax - aa + bb}{2b}\right)^2\right)}$.

Questo valore moltiplicato per $\frac{1}{2} b$ darà la superficie del Triangolo $ACB = \frac{b}{2}\left(x^2 - \left(\frac{2a - a^2 + b^2}{2b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, il cui differenziale eguagliato a zero per cagione del massimo darà l' equazione

$$\frac{1}{4} b \left(x^2 - \left(2ax - a^2 + b^2\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} . \left(2xdx - \left(\frac{2ax - a^2 + b^2}{bb}\right) adx\right)$$

$=$

$= 0$, ovvero $2xdx - \left(\frac{2ax - a^2 + b^2}{bb}\right) adx = 0$, onde $x = \frac{1}{2} a$, ed $a - x = \frac{1}{2} a$.

Cioè il triangolo sarà isoscele sopra la base AB, e ciascun lato sarà eguale alla metà della data somma.

LXXXVII.

PROBLEMA 8.° *Dato il perimetro di un triangolo determinare i tre lati della massima superficie.*

Pel problema precedente il triangolo sarà isoscele.

Si chiami adunque p il dato perimetro, x la base AB (Fig. 18.), e s' intenda abbassata la perpendicolare CD.

Sarà AC, ovvero $BC = \frac{p - x}{2}$

$CD = \sqrt{\left(\frac{p^2 - 2px + x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 - 2px)}$

Δ°. $ACB = \frac{1}{4} \sqrt{(p^2 x^2 - 2px^3)}$.

Il differenziale di questa superficie eguagliato a zero darà $\frac{(2p^2 x - 6px^2) dx}{8 (p^2 x^2 - 2px^3)^{\frac{1}{2}}} = 0$; oppure $2p^2 x - 6px^2 = 0$, e quindi $x = \frac{1}{3} p$, e $\frac{p - x}{2} = \frac{1}{3} p$.

Dunque il triangolo sarà equilatero, cioè questi tra tutti i triangoli isoperimetri avrà la massima superficie (*).

O

(*) Figure isoperimetre diconsi quelle, che hanno perimetri eguali.

LXXXVIII.

Problema 9.° *Dato il perimetro di un quadrilatero determinare i lati, cosicchè la superficie sia un massimo, ovvero tra gli infiniti quadrilateri isoperimetri determinare quegli della maggior superficie.*

Sia *ABCD* (Fig. 19.) un quadrilatero, ed in esso siano condotte le due diagonali *AC*, *BD*.

Pel problema 7.° è manifesto, che ciascuno dei due triangoli *ADC*, *ABC*, nei quali si risolve il quadrilatero *ADCB* dalla diagonale *AC*, avrà la maggior superficie, quando sia isoscele sopra la stessa *AC*, cioè quando sia $AB = BC$, ed $AD = DC$.

Parimente i due triangoli *BAD*, *BCD* avranno la massima superficie quando $AB = AD$, e $BC = DC$.

Dunque il quadrilatero della massima superficie avrà tutti i lati eguali: cioè sarà un rombo.

Sia in oltre abbassata la perpendicolare *DE* sopra il lato *AB*; si chiami a questo lato, ed x la parte *AE* compresa tra *DE*, e l' angolo *A*. Sarà $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ il valore della perpendicolare *DE*, $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$ la superficie del parallelogrammo, $-\frac{axdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$ il suo differenziale eguagliato a zero, e quindi $x = 0$; dunque la perpendicolare *DE* coinciderà col lato *AD*, l'angolo in *A* sarà retto, e conseguentemente ciascuno degli altri tre *B*, *C*, *D*.

Dunque tra tutti i quadrilateri d' egual perimetro il quadrato ha la massima superficie.

In simil guisa si può dimostrare, che tra tutti i pentagoni, esagoni, eptagoni, e generalmente tra tutte le figure

isoperimetre d' egual numero di lati, la regolare si è quella, che racchiude maggior superficie.

LXXXIX.

PROBLEMA 10.° *Tra le infinite figure regolari isoperimetre determinare quella della massima superficie.*

Si chiami x il lato MN della figura regolare cercata (Fig. 20.), p il suo perimetro, sia MNQ il circolo ad essa circonscritto, C il suo centro, CM, CN i due raggi condotti all' estremità del lato MN, e CP l' altezza del triangolo MCN.

Sarà $\frac{p}{x}$ il numero dei lati della figura regolare cercata, $CP = \sqrt{(\overline{CM}^2 - \overline{MP}^2)} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$ l' altezza del triangolo MCN, $\frac{1}{2} CP \,.\, MN \,.\, \frac{p}{x} = \frac{1}{2} p \sqrt{\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)}$ la superficie del poligono, $-\frac{pxdx}{8\sqrt{\left(r - \frac{x^2}{4}\right)}}$ il differenziale di questa superficie.

Questo differenziale eguagliato a Zero darà $x = 0$, e perciò $\frac{p}{x} = \infty$, e $CP = r$. Dunque la figura regolare cercata avrà il lato infinitamente piccolo, un numero infinito di lati, e la perpendicolare CP eguale al raggio del circolo circonscritto: dunque essa sarà questo stesso circolo; cioè questi è tra le infinite figure regolari isoperimetre quella, che racchiude maggior superficie (*).

(*) Volendo paragonare insieme le aree degli infiniti poligoni regolari isoperimetri, si chiami n il numero de' lati di un poligono regolare qualunque; S la di lui superficie, e p il costante perimetro.

LXXXX.

PROBLEMA II.° *Sia AB una retta data* (Fig. 21.), *ed MN una retta indefinita di data posizione rispetto alla AB, cercare nella MN un punto C, dal quale condotte le due rette CA, CB alle estremità della AB, la somma CA+CB sia un minimo.*

Dalle estremità A, B, della AB si menino alla MN le due perpendicolari AD, BE, le quali insieme colla DE, per esser conosciuta la posizione della MN rispetto alla AB, saranno date. Si faccia $DE = a$, $AD = b$, $BE = c$, $DC = x$, e $CE = a - x$; sarà $AC = \sqrt{(b^2 + x^2)}$, $BC = \sqrt{(c^2 + a^2 - 2ax + x^2)}$, ed $AC + BC = \sqrt{(b^2 + x^2)} + \sqrt{(c^2 + a^2 - 2ax + x^2)}$.

Dunque differenziando questa somma, ed eguagliando a zero, si avrà $\frac{2xdx}{\sqrt{(b^2+x^2)}} + \frac{2xdx - 2adx}{\sqrt{(c^2+a^2-2ax+x^2)}} = 0$.

Sarà $CP = \text{Cos}.\ MCP = \text{Cos}.\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) = \text{Cos}.\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ ed $S = \frac{1}{2}p.\text{Cos}.\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$.

Se la figura regolare è un Δ equilatero sarà $S = \frac{1}{2}p.\text{Cos}.\ 60^\circ = 2500000.p.$

Se un quadrato . . . . $S = \frac{1}{2}p.\text{Cos}.\ 45^\circ = 3535534.p.$

Se un pentagono . . . . $S = \frac{1}{2}p.\text{Cos}.\ 36^\circ = 4014087.p.$

Se un esagono . . . . $S = \frac{1}{2}p.\text{Cos}.\ 30^\circ = 4308146.p.$

⋮

Se un Circolo sarà $S = \frac{1}{2}p.\text{Cos}.\left(\frac{180^\circ}{\infty}\right) = \frac{1}{2}p.\text{Cos}.\ 0^\circ = \frac{1}{2}p.r = 5000000.p.$

Dunque tralle infinite figure regolari isoperimetre il Δ.° equilatero ha la minima superficie, il circolo ha la massima, e delle altre figure quella ha maggior superficie, che ha un maggior numero di lati, e viceversa.

Riducendo, e levando i radicali

$$\frac{x^2}{b^2+x^2} - \frac{x^2-2ax+a^2}{c^2+a^2-2ax+x^2} = 0.$$

Togliendo le frazioni, ed ordinando per x

$$(c^2-b^2)\,x^2 + 2ab^2\,x - a^2\,b^2 = 0.$$

E finalmente completando l' equazione e risolvendo

$$x = -\frac{ab^2}{c^2-b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2\,b^2}{c^2-b^2} + \frac{a^2\,b^4}{(c^2-b^2)^2}\right)},$$

valore che corrisponde al minimo cercato.

LXXXXI.

COROLLARIO. Se *MN* sarà parallela alla retta *AB*, sarà $AD = BE$, ossia $b = c$, e l' equazione ordinata $(c^2-b^2)\,x^2 + 2ab^2\,x - a^2\,b^2 = 0$, ridurrassi a $2ab^2\,x$ $a^2\,b^2 = 0$, e quindi si avrà $x = \frac{1}{2}\,a = \frac{1}{2}\,DE$; cioè il triangolo *ACB* sarà isoscele sopra *AB*.

LXXXXII.

PROBLEMA 12.° *Nell' area del triangolo ABC* (Fig. 22) *siavi un punto D, dal quale condotte ai tre angoli le tre rette AD, BD, CD, la somma $AD + BD + CD$ sia un minimo, determinare gli angoli formati da queste rette intorno al punto D.*

Col centro *B*, e raggio *BD* s' intenda descritto l' arco di circolo *EDH*, di cui *DH* sia una porzione infinitesima, e da *H* siano abbassate le perpendicolari *HG*, *HI* alle due rette *DA*, *DC*.

Si faccia $DA = x$, $BD = y$, $DC = z$, sarà $x + y + z$ il minimo cercato, il cui differenziale, supponendo costante il raggio $DB = y$, sarà $dx + dz = 0$, onde $dx = -dz$.

Dunque riguardando *DG*, *DI* come i differenziali rispettivi di *DA*, *DC*, e l' infinitesima *DH* come una linea retta

perpendicolare in D a DB, sarà $DG = DI$, poichè $dx = -dz$, non considerando la diversità dei segni, ed il triangolo DHI in tutto eguale al triangolo DHG, quindi angol. $HDI = HDG$. Ma sono ancora tra loro eguali i due angoli retti BDH, t, e i due verticali HDG, s: dunque sarà Ang. $ADB = t + s = BDH + HDG = BDH + HDI = BDC$

Similmente se col centro A e raggio AD si supporrà descritto un altro arco di circolo, si troverà angol. $ADB = ADC$. Dunque i tre angoli intorno al punto D debbono essere eguali tra loro, e ciascuno a 120.°

Il problema non avrebbe luogo se alcuno dei tre angoli del triangolo fosse o eguale, o maggiore di 120.°

LXXXXIII.

Problema 13.° *Assegnare le tre dimensioni di un parallelipedo rettangolo, il quale sotto una data superficie comprenda la massima solidità.*

Si chiami x l'altezza del solido, y, z i lati della base; sarà la di lui superficie $2xy + 2xz + 2yz$, e la solidità xyz.

La prima deve essere costante, e la seconda un massimo; dunque, supponendo costante l'altezza x, sarà il differenziale della superficie $2xdy + 2xdz + 2ydz + 2zdy = 0$, e quello della solidità $xydz + xzdy = 0$.

Dal primo differenziale si ottiene $\frac{dy}{dx} = \frac{-x-y}{x+z}$.

Dal secondo . . . . $\frac{dy}{dz} = -\frac{y}{z}$.

ed eguagliando questi due valori si avrà $\frac{-x-y}{x+z} = -\frac{y}{z}$, e quindi $z = y$; dunque nella posizione che l'altezza x sia costante, la base del solido sarà un quadrato.

Si faccia ora variare anche l' altezza x, e ſi ponga $y = z$. La ſuperficie del parallelipedo ſarà $4xy + 2y^2$, e la ſolidità xy^2.

Il differenziale di quella $4xdy + 4ydx + 4ydy = 0$.

Il differenziale di queſta $y^2 dx + 2xydy = 0$.

Dal primo ſi ottiene $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+y}$.

Dal ſecondo. . . $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x}$.

Quindi ſarà $\frac{-y}{x+y} = \frac{-y}{2x}$, ed $x = y$; ma $y = z$: dunque $x = y = z$; cioè il ſolido richieſto ſarà un cubo.

LXXXXIV.

COROLLARIO. Tra gli infiniti parallelepipedi d' ugual ſuperficie il cubo ha la maſſima ſolidità; e viceverſa tra gli infiniti parallelepipedi d'eguale ſolidità il cubo ha la minima ſuperficie.

Allo ſteſſo modo ſi potrà determinare quale tra gli infiniti Priſmi, Cilindri, Piramidi, o Coni retti d' egual ſuperficie abbia la maſſima ſolidità, e viceverſa quale tra gli infiniti Priſmi, Cilindri, Piramidi, o Coni retti d' eguale ſolidità abbia la minima ſuperficie.

LXXXXV.

PROBLEMA 14° *Sia AB* (Fig. 23.) *il diametro alla baſe di un cono retto troncato parallelamente alla ſteſſa baſe, e CG l' altezza, determinare il diametro EF della ſezione per modo, che la ſuperficie conveſſa del cono troncato ſia un maſſimo.*

Si chiami a l'altezza CG del Cono, b il raggio AC

della base, x il raggio GE della sezione, e si conduca la EH parallela a CG. Sarà $AE = \sqrt{(\overline{EH}^2 + \overline{AH}^2)} = \sqrt{(b^2 - 2bx + x^2 + a^2)}$, e, prendendo il rapporto del raggio alla circonferenza $1 : c$, sarà bc la circonferenza della base AB, e cx quella della sezione EF.

Nel cono retto troncato parallelamente alla base la superficie convessa è eguale al prodotto del lato AE nella semisomma delle circonferenze descritte dai raggi AC, EG delle opposte basi. Dunque questa superficie sarà $\frac{cx+bc}{2}\sqrt{(b^2 - 2bx + x^2 + a^2)}$, ed il suo differenziale

$$\frac{cx+bc}{2}\left(\frac{-b+x}{\sqrt{(b^2-2bx+x^2+a^2)}}\right)dx + \sqrt{(b^2-2bx+x^2+a^2)}\,\frac{cdx}{2}.$$

Questi, a motivo del massimo posto eguale a zero, darà l' equazione $x^2 - bx + \frac{a^2}{2} = 0$, dalla quale si avrà $x = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - 2a^2)}$.

LXXXXVI.

Problema 15.° *Con un piano tagliare il cono retto ACB (Fig. 24.) in guisa, che la nascente sezione MEm sia una parabola della più gran superficie.*

Si chiami x l' Ascissa AP, a il diametro AB della base, b il lato AC del cono.

Per la proprietà del circolo sarà $PM = \sqrt{(ax - xx)}$, e pel parallelismo dell' asse della parabola PE col lato AC del cono $AB : BP = AC : PE = \frac{BP.AC}{AB} = \frac{ab-bx}{a}$, onde la superficie della parabola MEm sarà $\frac{4}{3}\sqrt{(ax - xx)}\left(\frac{ab-bx}{a}\right)$,

quale

quale dovendo esser massima darà l' equazione differenziale $-\frac{2b}{3a}(ax-xx)^{\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{3}\left(\frac{ab-bx}{a}\right).(ax-xx)^{-\frac{1}{2}}.(adx-2xdx)$ $=0$, cioè riducendo ed insieme ordinando per x si avrà l'equazione $x^2-\frac{5ax}{4}-\frac{a^2}{4}=0$, e risolvendo $x=\frac{5}{8}a\pm\frac{3}{8}a$.

Il segno positivo è inutile, poichè dà $x=a$, il negativo dà $x=\frac{1}{4}a$, e dinota che la parabola della massima superficie passerà per la quarta parte dell' asse AB, facendo origine al vertice A, cioè prendendo $AP=\frac{1}{4}AB$, e $CE=\frac{1}{4}BC$.

LXXXXVII.

PROBLEMA 16.° *Tra gli infiniti Coni, che si possono inscrivere in una data sfera, determinare quegli della massima superficie convessa, e della massima solidità.*

Sia AMB (Fig. 25.) il semicircolo genitore della sfera, AMP il triangolo che rivolgendosi intorno ad AP deve generare il cono proposto. Si chiami a il diametro AB, $1:c$ il raporto del raggio alla circonferenza del circolo, ed x l'ascissa AP. Sarà $\sqrt{(ax-xx)}$ il valore della ordinata MP, $\sqrt{(ax)}$ quello del lato AM, $c\sqrt{(ax-xx)}$ la periferia descritta dalla stessa MP, ossia il perimetro alla base del cono, $c\sqrt{(ax-xx)}.\frac{1}{2}\sqrt{(ax-xx)}=\frac{c}{2}(ax-xx)$ la superficie della stessa base.

Quindi $\sqrt{ax}\,\frac{c}{2}\sqrt{(ax-xx)}=\frac{c}{2}\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}$ la superficie convessa del cono, e $\frac{c}{2}(ax-xx).\frac{x}{3}=\frac{c}{6}(ax^2-x^3)$ la sua solidità.

Ma ciascuna di queste due funzioni debb' essere un massimo, dunque differenziando, ed eguagliando a zero si avrà per la prima $\frac{2a^2 cxdx - 3acx^2 dx}{4\sqrt{(a^2 x^2 - ax^3)}} = 0$, e perciò $x = \frac{2}{3}a$, e per la seconda $\frac{2}{3} acxdx - \frac{1}{2} cx^2 dx = 0$, onde $x = \frac{4}{3} a$.

Dunque il cono ricercato avrà per altezza i $\frac{2}{3}$ dell' asse della sfera.

LXXXVIII.

PROBLEMA 17.° *In una data Ellipsoide inscrivere il cilindro della più gran superficie convessa.*

L' Ellipsoide s' intenda generata dalla rotazione della semiellissi DAE (Fig. 26.) intorno il minor asse DE, e sia $MmnN$ la sezione del proposto cilindro, Mm il suo lato, C il centro dell' Ellissi ec. Si faccia $AB = 2a$, $PC = x$, $MP = y$, $1 : c$ il rapporto del raggio alla periferia del circolo. Sarà $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$ l' equazione all' Ellissi, cx la periferia descritta da $PC = mq$, ossia il perimetro alla base del cilindro, $2y.cx = \frac{2bcx}{a}\sqrt{(aa - xx)}$ la superficie convessa dello stesso cilindro. Differenziando questa superficie, ed egualiando a zero si avrà $\frac{2bc}{a}\sqrt{(aa - xx)}\,dx - \frac{2bcxxdx}{a\sqrt{(aa - xx)}} = 0$, onde $xx = \frac{1}{2} aa$, $x = \sqrt{\frac{aa}{2}}$, ed $y = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{aa}{2}} = \sqrt{\frac{bb}{2}}$.

Dunque PC sarà media proporzionale tra AC, e $\frac{1}{2} AC$, e PM media tra CD e $\frac{1}{2} CD$.

IC.

COROLLARIO. Se l' Ellissi degenerasse in un circolo, sarebbe $a = b$, onde $x = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$; cioè il diametro del cilindro eguaglierebbe la sua altezza.

CAPO NONO.

Delle Evolute, e de' Raggi Osculatori nelle Curve.

C.

AL vertice B di una qualunque curva BC (Fig. 27.) ſia applicata una tangente indefinita AD, la quale movendoſi ſoltanto intorno alla curva in guiſa di rimaner ſempre tangente in qualche di lei punto C, deſcriva colla ſua eſtremità A l'altra curva AMN.

La curva BC, alla quale è applicata la tangente AD, chiamaſi *Evoluta*, *Sviluppata*, o *Curva generante*.

La curva AMN deſcritta dal punto A la *Generata*, e qualunque parte MC della tangente compreſa tra la generata, ed il punto del contatto C, *Raggio Oſculatore*, *Raggio di Curvatura*, o della *Sviluppata*.

CI.

Le proprietà di queſto raggio oſculatore ſono

1.° Che egli è ſempre eguale alla coſtante porzione di tangente AB più l'arco BC della ſviluppata compreſo tra l'origine B ed il punto del contatto C.

2.° Che è perpendicolare alla generata in ciaſcun punto M, nel quale ritrovaſi la ſua eſtremità A; poichè la tangente al circolo eſſendo perpendicolare al raggio tirato dal punto del contatto, e ciaſcun archetto infiniteſimo MM' deſcritto da CM nel paſſare dallo ſtato CM all' infinitamente proſſimo $C'M'$ potendoſi riguardare come un archetto di circolo di raggio CM e centro C, lo ſteſſo raggio MC

farà perpendicolare alla tangente *MT* nel punto *M* della generata, cioè all' archetto infinitesimo *MM'* della stessa generata.

3.° Che serve a misurare la curvatura in ciascun punto della generata; poichè se alle due estremità *M*, *M'* di un archetto infinitesimo *MM'* si conduranno due perpendicolari *MC*, *M'C*, queste s'incontreranno in alcun punto *C* della sviluppata, e si potrà riguardare l' archetto *MM'* come un arco di circolo descritto dal centro *C*, e però la curva ed il circolo avranno nell' archetto *MM'* una comune curvatura. Ma il raggio è quegli, che determina la curvatura del suo circolo: dunque il raggio osculatore determina la curvatura in ciascun punto della generata. Il circolo, di cui *MC* è raggio, si chiama *Circolo Osculatore*.

CII.

Da quest' ultima proprietà del raggio osculatore si inferisce, che, essendo le curvature de' circoli nella ragione inversa dei loro raggi, poichè i circoli sono tanto meno incurvati, quanto più grandi sono i raggi loro, e viceversa, le curvature della generata in due diversi punti del suo perimetro staranno nella ragione inversa de' loro raggi osculatori. Così la maggior curvatura è all' origine *A* dove il raggio osculatore è il più piccolo, e la minore dove il raggio osculatore è il più grande: la generata è tanto più incurvata, quanto più si approssima all' origine *A*, e tanto meno incurvata, quanto più si discosta da questa origine. Se il raggio osculatore diventa un minimo, la curvatuta diventa un massimo, ed all' opposto questa si fa minima, quando quello si fa massimo. Dove il primo svanisce, la seconda diventa infinita, e dove quello diventa infinito sva-

nisce la curvatura; cioè al raggio zero corrisponde l' evanescenza di un arco, e diventando infinito il raggio osculatore, l'arco della curva degenera in una linea retta.

CIII.

Sia *Mm* un arco qualunque di curva (Fig. 28.), *MC*, *mc* due perpendicolari o raggi osculatori alle estremità di quest' arco, che s' incontrano in qualche punto *C*.

L' angolo *MCm* formato da questi due raggi in C si chiama *angolo di curvatura dell' arco MN.* In *M* ed *m* siano condotte alla curva le due tangenti *MP*, *mO*, che incontrandosi in qualche punto *O* dalla parte convessa della curva formeranno l' angolo esteriore $POm =$ all' angolo *C*; poichè essendo retti gli angoli in *M* ed *m* formati dalle tangenti co' raggi osculatori, sarà ang. $MCm + MOm = 180° = MOm + POm$, e levando l' angolo comune *MOm*, sarà ang. $MCm = POm$. Cioè l' angolo di curvatura di un dato arco di curva è eguale all' angolo formato esteriormente dalle due tangenti condotte all' estremità di quest' arco. Se l' arco *Mm* sarà infinitamente piccolo, si potrà riguardare come un arco circolare di raggio *MC* e centro *C*, onde condotta la corda *Mm* per la proprietà del circolo sarà Ang. *MCm*, ossia *POm* doppio dell' angolo *OMm*, ed il triangolo *MOm* isoscele sopra la base *Mm*.

Sulla curva si prenda un altro arco *Nn* eguale al primo *Mm*, all' estremità di *Nn* si menino i raggi osculatori *ND*, *nD*, e siano diverse le curvature nei due archi infinitesimi *Mm*, *Nn*. I due raggi *ND*, *nD* saranno diversi dai due *MC*, *mc*, l'angolo *D* sarà diverso dall' angolo *C*, ed i valori di questi due angoli *D*, *C*, per ciò che si è detto saranno

reciprocamente proporzionali ai raggi MC, ND. Dunque le curvature in due diversi punti di una curva saranno reciprocamente proporzionali ai raggi osculatori in questi punti.

CIV.

Problema 1.° *Cercare una formola generale esprimente il valore del raggio osculatore, co-raggio, ec. per ciascun punto di una data curva.*

Se la curva è riferita ad un asse AR (Fig. 29.) siano MC, mC due raggi osculatori infinitamente prossimi, MP, mp le corrispondenti ordinate, Mr una parallela all'asse, e dal punto N siano condotte le NE, NL, la prima perpendicolare, e la seconda parallela al raggio mC.

Dai triangoli simili MNL, MCm si ha

$$Mm : MC :: ML : MN$$

ossia $Mm : MC :: Mm - NE : MN$

onde $NE = \frac{(MC - MN)\,Mm}{CM}$,

e dagli altri due triangoli Mrm, NEn

$Mm : Mr :: Nn : NE = \frac{Mr \,.\, Nn}{Mm}$;

ed eguagliando tra loro questi due valori di NE, ed eliminando il raggio osculatore si troverà $MC = \frac{MN \,.\, \overline{Mm}}{\overline{Mm} - Mr \,.\, Nn}$.

Ma $Mr = dx$, $mr = dy$, MN (normale alla curva) $= \frac{yds}{dx}$, PN (sottonormale) $= \frac{ydy}{dx}$, $Nn = d(AN) = d(AP + PN)$ $= d\left(x + \frac{ydy}{dx}\right) = dx + \frac{ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$, ed $Mm = ds$

Dunque rimettendo tutti questi valori sarà $MC =$

$$\frac{yds^3}{dxds^2 - dx^2 \left(dx + \frac{ydxdy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}\right)}.$$

Oppure, sostituendo $\sqrt{(dx^2 + dx^2)}$ in luogo di ds, e riducendo i termini della frazione, sarà $MC = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$.

Dall'estremità C del raggio osculatore si abbassi all'ordinata MP prolungata la perpendicolare CQ: la parte MQ, dell' ordinata compresa tra l'origine M ed il punto d' incidenza Q dicesi *Co-raggio Osculatore*. Il valore di questa retta, quando sia dato il raggio MC, si determina per mezzo dei triangoli simili MCQ, MNP, nei quali si ha $MN : MP :: MC : MQ = \frac{MP . MC}{MN} = \frac{dx(dy^2 + dx^2)}{dyddx - ddxddy}$.

Pe' medesimi triangoli si ha ancora $QC = \frac{dy(dy^2 + dx^2)}{dyddx - dxddy}$.

Si chiami q la misura dell'angolo di curvatura MCm, e si faccia il raggio eguale all' unità, sarà $MC : 1 :: (Mm = ds) : q = \frac{ds}{CM} = \frac{ds(dyddx - dxddy)}{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dyddx - dxddy}{ds^2}$.

Se le ordinate parallele fanno coll' asse della curva un dato angolo, si avranno le medesime formole di MC, MQ, e QC, coll' abbassare dalle estremità de' due raggi osculatori infinitamente prossimi due perpendicolari all' all' asse, e coll' assumer queste in luogo delle corrispondenti ordinate.

Se la curva è riferita ad un foco P (Fig.30.), siano PM, Pm due ordinate imfinitamente prossime, col centro P e raggio FM si descriva l' archetto circolare Mr, da P si ab-

bassino le perpendicolari PT, Pt ai due raggi osculatori MC, mC, e dal punto d' incontro N si conduca Nn parallela ad mC.

I due triangoli Mmr, PMT sono simili, poichè Ang. $PMr = TMm = 90.°$, $PMr - TMr = TMm - TMr$, ossia $PMT = rMm$, ed Ang. $T = r = 90.°$ Dunque sarà

$$Mm : Mr :: PM : MT = MN = \frac{PM.Mr}{Mm}.$$

$$Mm : mr :: PM : PT = PN = \frac{PM.mr}{Mm}.$$

Ma gli altri due triangoli MNn, MCm danno $Mn : MN :: Mm : MC$, cioè $Mm - Nt : \frac{PM.Mr}{Mm} : Mm : MC$; dunque $MC = \frac{PM.Mr}{Mm - Nt}$.

Si faccia $PM = y$, ed $Mr = dx$, sarà $mr = dy$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

$$MN = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, PN = \frac{ydy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}, Nt = d(PN) =$$

$$d\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{(dx^2 + dy^2)(yddy + dy^2) - ydy(dxddx + dyddy)}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{ed } Mm - Nt = \frac{dx^2(dx^2 + dy^2 - yddy) + ydydxddx)}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sostituendo quindi questi valori sarà

$$MC = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy + ydyddx},$$ ed abbassando da C perpendicolarmente ad MP la CQ per la simiglianza de' triangoli rettangoli MNP, MQC si avrà $MP : MN :: MC : MQ = \frac{MC.MN}{MP}$; cioè surrogati i valori di MC, MN ed MP sarà

$$MQ = \frac{ydx(dx^2 + dy^2)}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}.$$

$$QC = \frac{ydy(dx^2 + dy^2)}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}.$$

$$q = \frac{ds}{MC} = \frac{dxds^2 - ydxddy + ydyddx}{yds^2}.$$

Questa

CV.

Queste formole divengono più semplici, qualora si supponga costante alcuna delle tre differenze dx, dy, ds. Ordinariamente fassi costante la dx, cioè $ddx = 0$, e quindi

$$\left.\begin{array}{l} MC = \dfrac{-(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy} = \dfrac{-ds^3}{dxddy} \\ MQ = \dfrac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \dfrac{-ds^2}{ddy}. \\ QC = -\dfrac{dyds^2}{dxddy},\ e\ q = \dfrac{-dxddy}{ds^3} \end{array}\right\}\ \text{Per le curve riferite ad un asse.}$$

$$\left.\begin{array}{l} MC = \dfrac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy} = \dfrac{yds^3}{dxds^2-ydxddy} \\ MQ = \dfrac{y(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2-yddy} = \dfrac{yds^2}{ds^2-yddy} \\ QC = \dfrac{ydy(dx^2+dy^2)}{dx(dx^2+dy^2-yddy)},\ q = -\dfrac{dxddy}{ds^3} \end{array}\right\}\ \text{Per le curve riferite ad un foco.}$$

Oppure, chiamando n la normale alla curva, la cui espressione generale è $\frac{yds}{dx}$, e sostituendo, si ha per le prime tre formole

$$MC = \frac{-n^3 dx^3}{y^3 ddy};\ MQ = \frac{-n^2 dx^2}{y^2 ddy};\ QC = -\frac{n^2 dxdy}{y^2 ddy}.$$

Per le ultime

$$MC = \frac{n^3 dx^2}{n^2 dx^2 - y^3 ddy};\ MQ = \frac{n^2 ydx^2}{n^2 dx^2 - y^3 ddy};\ QC = \frac{n^2 ydx^2}{n^2 dx^3 - y^3 dxddy}.$$

CVI.

Ad applicare ciascuna di queste formole al caso di una data curva, si differenzj due volte la di lei equazione, affine di avere i valori di dx, e ddx dati per y, e dy, oppure quelli di dy, e ddy dati per x, e dx, e questi valori si sostituiscano in ciascuna di quelle formole generali. Ciò fatto si avranno i valori delle rette MC, MQ, QC .... ec. in termini finiti.

La curva rivolgerà la sua concavità o convessità alla linea delle ascisse, secondochè il valore del raggio osculatore, o del co-raggio sortirà dal calcolo o positivo, o negativo; poichè in qualunque curva il raggio e co-raggio osculatore sono posti dalla parte concava, e nelle esposte formole generali, per cui si è supposta una curva concava all' asse, i valori di quelle due rette si sono assunti per positivi.

CVII.

Con un poco d'artificio si possono evitare le differenze seconde nelle formole del raggio osculatore, co-raggio... ec.

Sia *AM* (Fig. 31.) una curva riferita ad un' asse *AP*, *MC*, *mc* due raggi osculatori infinitamente prossimi, *MP*, *mp* le corrispondenti ordinate. Sulla prima di queste *MP* si prenda la parte *MN* eguale ad una costante arbitraria, dal punto *M* si abbassi perpendicolarmente ad *MC* la *NT*, e dal punto *O*, in cui *NT* incontra l' ordinata *mp*, si conduca *OV* perpendicolare all' altro raggio osculatore *mC*, e finalmente si tiri *MS* parallela ad *AP*.

Per la costruzione saranno simili i due triangoli *MSm* *MTM*, poichè gli angoli *S*, *T* sono retti, ed essendo pure retti i due *mMC*, *SMP*, levato da ciascun d' essi l' angolo comune *SMT*, saranno eguali tra loro i due angoli *mMS*, *TMN*.

In oltre, supponendo retto l'angolo in *m* formato dal raggio osculatore *MC* coll' archetto infinitesimo *Mm*, saranno ancora simili per ordine i tre triangoli rettangoli *OTI*, *ICV*, *MCm*.

Si faccia adunque $AP = x$, $PM = y$, $MN = b$, $MT = z$, sarà $MS = dx$, $mS = dy$, $TI = dz$. Dai due triango-

goli MSm, MNT si avrà $Mm.NT = mS.MN$, e dai due OTI, MCm, $Mm.OT = MC.TI$. Onde, prendendo NT, OT per eguali, giacchè i punti O, N sono infinitamente prossimi, ed eguagliando sarà $mS.MN = MC.TI$, e quindi $MC = \frac{mS.MN}{TI} = \frac{bdy}{ds}$.

Ma i due primi triangoli MSm, MNT danno ancora $MT = \frac{MN.MS}{Mm}$, cioè $z = \frac{bdz}{ds}$. Dunque se col mezzo dell' equazione alla curva si determinerà questo valore di z, differenziando si avrà quello pure di dz, il quale posto a denominatore della formola precedente invece della stessa dx, darà il valore di MC in termini finiti.

Alla stessa maniera si potrà ritrovare la formola pel co-raggio, e quelle pel raggio osculatore, e co-raggio nelle curve riferite ad un foco.

CVIII.

Data l' equazione alla generata col valore del raggio osculatore per qualunque di lei punto è cosa facile il determinare l' Equazione alla sviluppata. Dal punto C dell' Evoluta (Fig. 29.) si abbassino le due perpendicolari CR, CS, la prima all' asse AR della generata, la seconda all' asse BS della stessa evoluta, e si prolunghi quest' ultima sino ad incontrare in Q l' ordinata MP, prolungata se abbisogna. Dai triangoli simili Mrm, MQC si avrà

1.° $Mm : Mr :: MC : MQ = \frac{MC.Mr}{Mm} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, facendo costante per brevità di calcolo la dx; onde $BS = PQ = MQ - MP = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$, valore dell' ascissa BS all'evoluta.

2.° $Mm : mr :: MC : CQ$, ossia $PR = \frac{MC . mr}{Mm} = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$, e quindi $CS = BR = AP + PR - AB = x + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy} - a$, valore dell'ordinata CS alla medesima evoluta.

Questi due valori combinati colla equazione della generata AM daranno quella della sviluppata BC.

CIX.

PROBLEMA 2.° *Determinare il Raggio del circolo osculatore in ciascuna delle quattro sezioni Coniche.*

Dall' equazione a queste curve $y^2 = px \pm \frac{pxx}{a}$, facendo costante dx, si ha $ydy = \frac{pdx}{2} \mp \frac{pxdx}{a}$

$$yddy + dy^2 = \mp \frac{pdx^2}{a}$$

$$y^2 ddy = \mp \frac{py^2 dx^2}{a} - y^2 dy^2$$

e, sostituendo i valori di y^2 e dy^2,

$y^2 ddy = \mp \left(\frac{p^2 x}{a} \mp \frac{p^2 xx}{a^2}\right)dx^2 - \left(\frac{p}{2} \mp \frac{px}{a}\right)^2 dx^2 = - \frac{p^2 dx^2}{4}$, ed $MC = \frac{n^3}{\frac{1}{4} p^2}$; dunque *il raggio osculatore in ciascuna sezione conica ordinaria è eguale al cubo della normale diviso pel quadrato della metà del parametro.*

CX.

COROLLARIO 1.° All'origine della curva, in cui $x = 0$, ſi ha $n = \frac{1}{2} p$, ed $MC = \frac{1}{2} p$; cioè *il raggio dell' evoluta in queſto punto è eguale alla metà del parametro.*

CXI.

COROLLARIO 2.° Nel circolo il raggio di curvatura è lo ſteſſo raggio, e l' evoluta è il ſuo medeſimo centro; poichè eſſendo $p = a$, ſarà $= n \frac{1}{2} a$, ed $MC = \frac{1}{2} a$.

CXII.

PROBLEMA 3.° *Determinare la ſviluppata nella parabola ordinaria.*

In queſta curva ſi ha $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, e $ddy = -\frac{p^2 dx^2}{4(px)^{\frac{3}{2}}}$; dunque, ſoſtituendo queſti valori nelle generali eſpreſſioni delle coordinate BS, SC all' evoluta, ſi avrà $BS =$

$$\frac{dx^2 + \frac{p^2 dx^2}{4pdx}}{\frac{p^2 dx^2}{4\sqrt{(px)^3}}} - \sqrt{px} = \frac{4x}{p} \sqrt{(px)}, \text{ ed } SC = x +$$

$$\frac{\frac{pdx}{2\sqrt{px}}\left(dx^2 + \frac{p^2 dx^2}{4px}\right)}{\frac{p^2 dx^2}{4\sqrt{(px)^3}}} - a = 3x + \frac{p}{2} - a,$$

ovvero, ſiccome a è il raggio oſculatore all' eſtremità della parabola, il quale è eguale alla metà del parametro, ſarà $SC = 3x$.

Dunque, se si chiamerà z l'ascissa BS, ed v l'ordinata SC, sarà $u = \frac{1}{3} v$, e $z = \frac{4v}{3p} \sqrt{(\frac{1}{3} pv)}$. Quindi $z^2 = \frac{16}{27} pv^3$, ed $v^3 = \frac{27}{16} pz^2$, equazione alla seconda parabola cubica. *Dunque la sviluppata alla parabola ordinaria è una seconda parabola cubica, che ha per parametro li $\frac{27}{16}$ del parametro della proposta.*

Per descrivere questa curva, sopra l'asse ABR si prenda $AB = \frac{1}{2} p$, e sul prolungamento BR si alzino infinite perpendicolari RC, ciascuna delle quali si faccia di tale lunghezza, che il suo quadrato sia eguale al cubo della corrispondente ascissa BR, diviso per $\frac{27}{16} p$

Il punto B (CX) sarà l'origine dell'evoluta, o seconda parabola cubica, e tutti i punti C staranno nel suo perimetro, poichè per la costruzione sarà in ciascun punto $\overline{BR}^3 = \frac{27}{16} p . \overline{RC}^2$.

Se le ordinate BS' si prenderanno dalla parte opposta alla BS (Fig. 32.), si avrà da questa parte un altra seconda parabola cubica BC' simile alla prima BC, ma inversamente posta, quale sarà la sviluppata all'altro ramo AM' della parabola. Dunque la sviluppata alla parabola avrà in B, ove corrisponde il minimo raggio osculatore, un punto di regresso.

CXIII.

PROBLEMA 4.° *Cercare il valore del Raggio osculatore e del Co-raggio nell' iperbola equilatera riferita agli assintoti, data la sua equazione* $xy = aa$.

Sia A (Fig. 33.) il vertice della curva, AM, Am i suoi rami, S il suo centro, ed SP, Sp gli Assintoti. Differenziando due volte l' equazione, col supporre $ddx = 0$, si ha $dy = -\frac{a^2 dx}{x^2}$, e $ddy = -\frac{2a^2 dx}{x^3}$. Questi valori, sostituiti nelle formole del raggio osculatore, e co-raggio, danno $MC = \frac{-(x^4 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 x^3}$, ed $MQ = \frac{-(x^2 + y^2)}{2y}$, valori negativi, che si devono prendere dalla parte concava dell' Iperbola, mentre la data equazione appartiene alla parte convessa, ed il segno negativo indica una contraria posizione di queste rette.

CXIV.

COROLLARIO 1.° Per determinare con una semplice costruzione la posizione del raggio osculatore, e del co-raggio per un dato punto M dell' Iperbola, si chiami x la sua ascissa SP, y la sua ordinata MP; si conduca da S la la retta SM, e questa si prolunghi verso E, facendo $ME = \frac{1}{2} SM$; in E si alzi alla SE la perpendicolare EQ, che incontri in Q l' ordinata PM prolungata; da Q si meni QC parallela all' assintoto SP, ed in M si alzi la normale MC alla curva, che incontri in C la retta QC. Sarà MC il raggio del circolo osculatore pel punto M, MQ il co-raggio, e C il punto del contatto del raggio coll' evo-

luta; poichè dai triangoli ſimili SPM, EMQ ſi ha $PM : MS :: EM : MQ$, cioè $y : \sqrt{(x^2+y^2)} :: \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2)} : MQ = \frac{xx+yy}{2y}$, oſſia $\frac{xx+yy}{-2y}$, eſſendo MQ dalla parte de' negativi: dunque MQ è il Co-raggio corriſpondente al punto M. Il rimanente della coſtruzione è per ſe chiaro abbaſtanza.

CXV.

COROLLARIO 2.° Si differenzj $\frac{(x^4+a^4)^{\frac{3}{2}}}{-2ax^3}$, il differenziale ſi eguaglj a zero, e dalla formata equazione ſi cavi il valore di x; ſi troverà $x = a$, $MC = -\sqrt{(2a^2)}$, ed $MQ = -a$. Cioè il minimo raggio oſculatore corriſponderà al vertice dell' Iperbola, ſarà egu1le al ſemiaſſ: principale SA, e dovraſſi prendere ſopra queſt' aſſe dal vertice S in D; poichè ſe dal vertice A ſi condurrà la' AB perpendicolare all' aſſintoto, ſarà $SB = x = a$, $AB = y = a$, e $-AS$, oſſia $AD = -\sqrt{(2a^2)}$.

CXVI.

PROBLEMA 5.° *Cercare il Raggio oſculatore nella comune logaritmica.*

Sia MN queſta curva (Fig. 34.); AQ il ſuo aſſe, A l' origine delle aſciſſe, l' aſciſſa $AP = x$, l' ordinata corriſpondente $PM = y$; la ſottangente a queſta curva eſſendo coſtante (LVI.) ſi faccia $= a$. Sarà $\frac{ydy}{dy} = a$, $dy = \frac{ydx}{a}$, $dy^2 = \frac{y^2 dx^2}{a^2}$, e $ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{a^2}$. Quindi ſoſtituendo i valori di dy^2, e ddy nella formola del raggio oſculatore

$-\frac{ds^3}{dxddy}$, ſarà $MC = \frac{-a^2\left(dx^2+\frac{y^2dx^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{ydx^3} =$
$\frac{-(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$.

Nella logaritmica avvi un punto al quale corriſponde un raggio oſculatore minimo; per ritrovarlo ſi eguagli a Zero il differenziale di $-\frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$, ed operando al ſolito modo e riducendo ſi avrà $y^2 = \frac{1}{2}a^2$, ed $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ma in queſta curva l'aſciſſa x è eguale al logaritmo iperbolico dell' ordinata y moltiplicato pel modulo, o ſottangente a, cioè $x = a\,l.y$. Dunque ſarà $x = a\log.a\sqrt{\frac{1}{2}}$; e perciò fatto $AP = a\log.a\sqrt{\frac{1}{2}}$, e condotta l' ordinata PM, in M corriſponderà il minimo raggio oſculatore, e la ſviluppata ſarà *cuſpide* in C, cioè avrà quivi un punto di regreſſo.

CXVII.

PROBLEMA 6.° *Cercare il Raggio oſculatore, il Co-raggio, e la ſviluppata nella ſpirale logaritmica.*

La principale proprietà della ſpirale logaritmica ſi è, che condotta ad un qualunque punto M del ſuo perimetro (Fig. 35.) la tangente MT, e dal foco A l' ordinata AM, l'angolo AMT debba eſſere coſtante. Però, ſuppoſta la Am infinitamente proſſima alla AM, e deſcritto col raggio AM e centro A l' arco di circolo MR, eſſendo la ſottangente AT normale all' ordinata AM, ſarà coſtante la ragione di queſte due rette, e quella dalle differenze loro mR, MR; onde, facendo $AM = y$, ed $MR = dx$, ſarà $\frac{dx}{dy} = a$ l'equazione a queſta curva. Differenziando queſt' equazione avraſ-

si $ddy = o$, e sostituendo questo valore nelle formole del raggio osculatore, e del co-raggio per le curve riferite ad un foco si troverà $MC = \frac{y\left(dx^2 + \frac{dx^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 + \frac{dx^2}{a^2}} = \frac{y}{a}\surd(a^2+1)$,

ed $MQ = \frac{ydx^2 + \frac{ydx^2}{a^2}}{dx^2 + \frac{dx^2}{a^2}} = y = AM$, cioè il co-raggio eguale all' ordinata.

Per avere la sviluppata. In A si alzi la perpendicolare AC alla AM, quale si prolunghi fino ad incontrare la tangente in T, ed in M si conduca la normale MC alla curva. Dalla simiglianza de' triangoli rettangoli AMC, MRm si ha $MR : Mm :: MA : MC = \frac{MA . Mm}{MR} =$
$$y\sqrt{\left(\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}\right)} = y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y\sqrt{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)}$$
$= \frac{y}{a}\surd(a^2+1)$. Dunque MC sarà il raggio osculatore, ed AC il Co-raggio della curva, e per essere ancora costante l' angolo AMT, ed $AMT = ACM$, l' evoluta AC sarà una curva di tale proprietà, che l' angolo formato da una qualunque sua tangente MC, e dalla corrispondente ordinata AC sarà costante: cioè essa sarà una spirale logaritmica eguale alla data. Pertanto se prenderassi un raggio $AD = AC$, e si concepirà, che la logaritmica ABD s' aggiri intorno al punto A, finchè AD cada sopra AC, e la curva nella posizione AHC, la logaritmica in questa posizione sarà evoluta a se stessa nella prima posizione AED.

CXVIII.

PROBLEMA 7.° *Cercare il valore del Raggio Osculatore nella Cicloide ordinaria, e l' equazione alla sua Evoluta.*

Si chiami x l'ascissa AP (Fig. 36.) del circolo generatore della cicloide, $\surd(ax - xx)$ la corrispondente ordinata NP, u l' arco circolare $AN = MN$, y la $MP = MN + NP = u + \surd(ax + xx)$, e si conduca la mp infinitamente prossima alla MP, ed Nq parallela al diametro AB. Sarà $Nq = dx$, $nq = d(NP) = \frac{adx - 2xdx}{2\surd(ax - xx)}$, $Nn = du = \surd(Nq^2 + nq^2) = \sqrt{\left(dx^2 + \left(\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}\right)^2\right)} = \frac{adx}{2\surd(ax - xx)}$; onde $dy = du + d\surd(ax - xx) = \frac{adx - xdx}{\surd(ax - xx)}$, $ddy = \frac{-adx^2}{2x\sqrt{(ax - xx)}}$, e finalmente, sostituendo questi valori nella formola generale del raggio osculatore, si avrà

$$MC = \frac{\surd\left(dx^2 + \frac{a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}\right)^{3}}{\frac{adx^2}{2x\sqrt{ax - xx}}} = 2\surd(a^2 - ax).$$

Ma per la proprietà del circolo $BN = \surd(a^2 - ax)$. Dunque $MC = 2BN$, cioè nella Cicloide ordinaria il raggio osculatore è il doppio della corda corrispondente BN del circolo generatore.

Quindi, se prenderassi $x = 0$, sarà $MC = 2a$,
se $x = \frac{3}{4}a$, sarà $MC = a$,
se $x = \frac{15}{16}a$, sarà $MC = \frac{1}{2}a$,
se $x = a$, sarà $MC = 0$,

Cioè nella Cicloide il raggio del circolo oſculatore all' origine dell' aſſe è il doppio dello ſteſſo aſſe; ai $\frac{1}{4}$ dell' aſſe è eguale all' aſſe; ai $\frac{3}{4}$ è eguale alla metà dell' aſſe, ed è nullo all' eſtremità della baſe, oſſia in *R*. Dunque l' evoluta avrà la ſua origine nel punto *R*.

Per ſoddisfare alla ſeconda parte del problema, ſi alzi in *R* perpendicolarmente a *BR* la $RS = AB$, ſi deſcriva il ſemicircolo *RVS*, ſi prenda l'arco $RV = NB$, da *M* ſi conduca *MC* parallela alla *BN*, da *V* la *TC* parallela alla *RB*, e menisi la corda *RV*.

Per queſta coſtruzione ſarà Arc. $AN = MN = BQ$, ed Arc. $BN = RQ = VC$; Ma Arc. $RV =$ Arc. *BN*; dunque Arc. $RV = VC$; cioè il punto *C* ſtarà nella Cicloide inferiore *RCX* deſcritta dal circolo *RVS*, ed *MC* ſarà tangente alla medeſima in *C*, poichè parallela alla *RV*; ed inoltre, eſſendo $QC = RV = NB = MQ$, la tangente *MC* ſarà doppia alla corda *BN*, cioè ſarà il raggio oſculatore della Cicloide *AMR*. Dunque l' evoluta della Cicloide *AMR* è la Cicloide *RCX* ad eſſa eguale, ed inverſamente deſcritta.

CXIX.

COROLLARIO. L' arco della ſemicicloide ordinaria *AR* è eguale al doppio diametro del circolo genitore, e l' intera cicloide è quattro volte lo ſteſſo diametro; poichè il raggio oſculatore nell' origine *R* è zero, e quello al vertice *A* è eguale a $2AB = AX = RX = RA$.

CAPO DECIMO.

De' punti di Flesso contrario, e di Regresso e de' punti Serpentini nelle Curve.

CXX.

Punto *singolare* di una curva si chiama quello, il quale ha qualche proprietà non comune agli altri punti dell' istessa curva. I *punti Multipli*, quelli d' *Inflessione*, di *Regresso*, ed i *Serpentini* sono tutti punti singolari. De' punti multipli se n'è parlato abbastanza nel capo settimo. Il punto d' *Inflessione*, ossia di *Flesso contrario* è quello, in cui una curva da concava, che essa era rispetto ad una retta data di posizione, diventa convessa, o da convessa diventa concava. (Fig. 37, e 38.). Il punto di Regresso è quello, in cui la curva continuando ad esser o concava, o convessa si ritorce all'indietro rispetto a quella stessa retta. (Fig. 39, e 40).

CXXI.

Ogni punto di flesso, o di regresso M (Fig. 41.) porta seco due elementi della curva, cioè due archetti infinitesimi, i quali o giacciono in una stessa linea retta, o si si compenetrano collo stesso punto M; quindi è che la curvatura in M è o nulla, o infinita, e che perciò nella ricerca di un flesso, o di un regresso dovrà eguagliarsi all' infinito, oppure al zero il valore del raggio osculatore; ovvero, siccome ciascuna delle formole esprimenti lo stesso valore è una frazione, basterà eguagliare a zero il nume-

ratore, od il denominatore di questa formola (*). Così chiamando R il raggio osculatore, per le curve riferite ad un asse, in cui $R = \frac{-ds^3}{dxddy}$, si farà $-ds^3 = 0$, ovvero $dxddy = 0$; e per quelle riferite ad un foco, nelle quali $R = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$, si farà $yds^3 = 0$, ovvero $dxds^2 - ydxddy = 0$.

CXXII.

A determinare se il punto trovato M sia veramente un punto d'inflessione, oppure di regresso, e quale dei due, giacchè il metodo non solo non distingue un punto dall' altro, ma può eziandio somministrare qualch'altro punto singolare della curva, si cerchino i raggi osculatori pe' due archetti infinitesimi e consecutivi, che stanno l' uno, di quà, e l' altro di là dal punto M, e gli angoli di curvatura per questi stessi archetti. Se i due raggi osculatori trovati avranno segni simili, non si avrà in M nè un semplice flesso contrario, nè un regresso, ma bensì si avrà un flesso invisibile, di cui parlerassi sulla fine di questo capo, e se i due raggi osculatori avranno segni dissimili, si avrà in M un flesso contrario, ovvero un regresso, secondochè i due angoli di curvatura avranno o segni dissimili, o segni simili. La ragione di ciò si è, che l'angolo di curvatura non può cambiare il suo segno di $+$ in $-$, o di $-$ in $+$, se non dove la curva di concava all' asse od al foco si fa convessa, o di convessa si fa concava.

(*) Sia P il numeratore, e Q il denominatore della frazione, che esprime il valore del raggio osculatore. Sarà $R = \frac{P}{Q}$: ora se $\frac{P}{Q} = \infty$ conviene, che Q sia infinitamente piccolo rispetto a P, onde si farà $Q = 0$; e se $\frac{P}{Q} = 0$, P deve essere infinitamente piccolo rispetto a Q, e perciò si farà $P = 0$. Dunque nel caso di un flesso contrario, o di un regresso dovrà farsi $Q = 0$, ovvero $P = 0$.

CXXIII.

Problema 1.° *Data l' equazione di una curva riferita ad un asse trovare i suoi punti di flesso contrario e di regresso.*

Sia la curva dell' equazione $y^3 = a^3 + x^3$. Differenziando si ha $dy = \frac{x^2 dx}{y^2}$, $ddy = \frac{2x dx^2 - 2y dy^2}{y^2} = \frac{2xy^3 dx^2 - 2x^4 dx^2}{y^5}$, ossia, mettendo nel numeratore il valore di y^3, $ddy = \frac{2a^3 x dx^2}{y^5}$, e sostituendo questo valore nella formola del raggio osculatore si trova $R = \frac{-(y^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^3 xy}$.

Il numeratore eguagliato al zero dà l' equazione $-(y^4 + x^4)^{\frac{3}{2}} = 0$, dalla quale si ricava $x = \pm \sqrt[4]{-y^4}$, quantità immaginaria che non fa conoscer niente.

Il denominatore paragonato anch' esso al zero dà $2a^3 xy = 0$, donde $x = 0$, ed $y = 0$. Il valore $x = 0$ posto nella data equazione dà $y = a$, ed il valore $y = 0$ sostituito nella medesima dà $x = -a$.

Esaminando questi due valori di x, e principiando dal primo $x = 0$, si faccia $x = 0 \pm dx$, ossia $x = \pm dx$, sarà $R = \frac{\mp \sqrt{(a^4 + dx^4)^3}}{2a^4 dx}$; cioè, posto $x = dx$, R avrà un valore positivo, e posto $x = - dx$, R avrà un valore positivo.

Dunque nel punto della curva, ove corrisponde l' ascissa $x = 0$, v' è un flesso contrario, oppure un regresso. Per conoscere quale dei due egli sia, si esamini il valore dell' angolo di curvatura, che in questa curva, fatte le solite sostituzioni, trovasi essere $q = \frac{-2a^3 x dx}{y^4 + x^4 y}$.

Se in questo valore invece di x si pone dx, si avrà $q = -\frac{2a^3 dx^2}{y^5 + y dx^4}$ valore negativo, e se al contrario invece di x si pone $-dx$ si avrà $q = \frac{2a^3 dx^2}{y^5 + y dx^4}$ valore positivo. Dunque all' ascissa $x = 0$, cioè all' origine delle ascisse, corrisponde un punto di flesso contrario, e non un punto di regresso.

Quanto al valore $x = -a \pm dx$ si avrà $y = \sqrt[3]{(\pm 3a^2 dx)}$. Quindi $R = \pm \frac{\sqrt{(y^4 + x^4)^3}}{2a^4 (a^2 + dx)^{\frac{1}{3}}}$, e $q = \pm \frac{2a^4 dx}{(y^4 + x^4)(3a^2 dx)^{\frac{1}{3}}}$

Dunque all' ascissa $-a$ corrisponde un altro punto di flesso contrario.

Abbiasi l' equazione $y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$. Sarà $dy = \frac{2a^3 x dx}{(a^2 + x^2)^2}$,

$$ddy = \frac{2a^5 dx^2 - 6a^3 x^2 dx^2}{(a^2 + x^2)^3}, \text{ ed } R = -\frac{\left(1 + \frac{4a^6 x^2}{(a^2 + x^2)^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2a^5 - 6a^3 x^2}{(a^2 + x^2)^3}}.$$

Il numeratore eguagliato a Zero non vale perchè dà una quantità immaginaria. Il Denominatore dà $\frac{2a^5 - 6a^3 x^2}{(a^2 + x^2)^3} = 0$, e perciò $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, e sostituendo questo valore nella data equazione sarà $y = \frac{1}{4} a$, valori corrispondenti ad un punto d' inflessione; poichè, essendo $q = -\frac{(2a^5 - 6a^3 x^2)(a^2 + x^2) dx}{(a^2 + x^2)^4 + 4a^6 x^2}$, se invece si pone $\frac{a}{\sqrt{3}} \pm dx$, si avranno due valori di q con segni dissimili.

Nella curva dell' equazione $y = a + (x - a)^{\frac{3}{5}}$ si ha $dy = \frac{3}{5} (x - a)^{-\frac{2}{5}} dx$, $ddy = -\frac{6}{25} (x - a)^{-\frac{7}{5}} dx^2$, ed $R =$

$$= \frac{\left(1 + \frac{9}{25}(x-a)^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}},$$ il cui denominatore fatto eguale a zero dà l' equazione $\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}} = 0$, quindi $x = a$, ed $y = a$, valori corrispondenti al punto di flesso.

Sia la curva dell' equazione $y = a - (x-b)^{\frac{2}{3}}$. Sarà $dy = -\frac{2}{3}(x-b)^{-\frac{1}{3}} dx$, $ddy = \frac{2}{9}(x-b)^{-\frac{4}{3}} dx^2$, $R = \frac{-\left(1 + \frac{4}{9}(x-b)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{9}(x-b)^{-\frac{4}{3}}}$, e $q = \frac{-\frac{2}{9}(x-b)^{-\frac{4}{3}} dx}{1 + \frac{4}{9}(x-b)^{-\frac{2}{3}}}$. Il numeratore di R posto eguale al Zero dà una quantità immaginaria; ma il denominatore dà $x = b$, ed $y = a$. Posto $x = b \pm dx$ i due valori di R hanno segni dissimili, e quelli di q sono amendue negativi: dunque il punto ritrovato è un regresso.

CXXIV.

PROBLEMA 2.° *Determinare il flesso contrario nell' ordinaria Concoide.*

Sia RS una retta indefinita (Fig. 42.), e P un punto preso fuori di essa; da questo punto siano condotte alla RS infinite rette, e sopra di queste siano prese dall' una, e dall' altra parte della RS le parti EM, $E'M'$, $E''M''$, ec. Em, $E'm'$, $E''m''$, ec. tra loro eguali. La curva che passa per tutti i punti M, M', M'', ec. presi superiormente alla RS, si chiama *Concoide superiore*, e la curva, che passa

per tutti i punti m, m', m'' ec. presi al di sotto della stessa RS, chiamasi *Concoide inferiore*. La retta RS, che è ancora assintoto a queste due curve, dicesi *Direttrice*, la retta PCA calata da P perpendicolarmente alla RS *Asse*, ed il punto P *Polo* delle due curve.

Per la meccanica descrizione di questa curva si può anche immaginare, che lungo l'indefinita RS scorra un circolo di raggio determinato in guisa che, rimanendo sempre il centro C nella retta RS, un qualche suo diametro Aa si dirigga continuamente al polo P. Egli è evidente, che le due estremità A, a di questo diametro descriveranno sul piano della carta le due concoidi $MM'M''$, $mm'm''$.

Ciò posto, sia $CQ = x$, $QM = y$, $CA = a$, $PC = b$; sarà $ML = \sqrt{(\overline{EM}^2 - \overline{EL}^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Ma, i due triangoli simili PQM, ELM danno $EL : ML :: PQ : QM$, ossia $x : \sqrt{(a^2 - x^2)} :: b + x : y$. Dunque sarà $y = \frac{(b + x)\sqrt{(a^2 - a^2)}}{x}$. Questa è l'equazione della curva riferita all'asse AP, quale differenziata dà $dy = \frac{-x^3 dx - a^2 bdx}{x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}}$, e $ddy = \frac{(2a^4 b - a^2 x^3 - 3a^2 bx^2) dx^2}{x^3 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Il denominatore di R, che è $dxddy = \frac{(2a^4 b - a^2 x^3 - 3a^2 bx^2) dx^3}{x^3 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ fatto eguale a zero, dà l'equazione di terzo grado $x^3 + 3bx^2 - 2a^2 b = 0$, in cui una delle radici sarà il valore cercato di CQ.

Se $a = b$, l'equazione precedente trasformerassi in $x^3 + 3ax^2 - 2a^3 = 0$, e dividendo per $x + a$ si avrà $x^2 + 2ax - 2aa = 0$, onde x, ossia $CQ = -a + \sqrt{(3a^2)} = a(\sqrt{3} - 1)$.

Diversamente volendo considerare questa curva come riferita al polo P, si immagini l'altra ordinata PV infinitamente prossima alla PM, e sia descritto col raggio PM l'archetto di circolo MN, e col raggio PE l'archetto ET. Si faccia $PM = y$, $AC = a$, $PC = b$, $PE = z$, $MN = dx$, $GT = dz$. Sarà l'equazione alla concoide superiore $y = z + a$, il cui differenziale è $dy = dz$. Dai due settori MPN, EPT si ha $MP : EP :: MN : ET$, ossia $y : z :: dx : ET = \frac{zdx}{y}$, e dai due triangoli simili PCE, EGT, $PC : CE :: ET, GT$, ossia $b : \sqrt{(z^2 - b^2)} :: \frac{zdx}{y} : dz = \frac{zdx \sqrt{(z^2 - b^2)}}{by}$; ma $dz = dy$. Dunque $dy = \frac{zdx \sqrt{(z^2 - b^2)}}{by}$, e differenziando ancora quest' equazione sarà $ddy = \frac{(2yz^2 - b^2 y - z^3 + b^2 z) dxdz}{by^2 \sqrt{(z^2 - b^2)}}$, ossia, mettendo $\frac{zdx \sqrt{(z^2 - b^2)}}{by}$ invece di dz, $ddy = \frac{(2yz^3 - b^2 yz - z^4 + b^2 z^2) dx^2}{b^2 y^3}$, e sostituendo il valore $y = z + a$ sarà $ddy = \frac{(z^4 + 2az^3 - ab^2 z) dx^2}{b^2 (z + a)^3}$.

Ora prendendo la formola del raggio osculatore per le curve riferite al foco, eguagliando a zero il suo denominatore $dx^3 + dxdy^2 - ydxddy$, e sostituendo in essa i valori di y, dy, ddy si avrà $\frac{(a^2 b^2 + 3ab^2 z - 2az^3) dx^3}{b^2 (z + a)^2} = 0$, e quindi l'equazione di terzo grado $ab^2 + 3b^2 z - 2z^3 = 0$, in cui una delle radici accresciuta della costante a darà il valore dell' ordinata PM.

Se $a = b$, l'equazione diventa $a^3 + 3a^2 z - 2z^3 = 0$, ossia $z^3 - \frac{3a^2 z}{2} - \frac{a^3}{2} = 0$, in cui si hanno le tre radici

$x = -a$, $x = \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{3})$, $x = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{3})$. Le prime due negative non fervono, la terza accrefciuta della coftante a dà il valore di y, offia di PM corrifpondente, al fleffo contrario in M.

In fimil guifa fi potrà ancora ritrovare il fleffo contrario nella Concoide inferiore $m\,m'\,m''$.

CXXV.

Altri punti di regreffo fi confiderano nelle curve. Sia AP l' affe di una curva, BM, Bm due rami della medefima, i quali s' incontrano, e terminano in qualche punto B, formandovi un punto di regreffo. Se qnefti due rami fi volgono fcambievolmente le loro conveffità come nelle Figure 43 e 44 il regreffo dicefi di prima fpecie, e di feconda fpecie fi chiama, quando l'uno de' rami rivolge il fuo concavo verfo la conveffità dell' altro ramo come nelle Figure 45 e 46.

CXXVI.

La fola ifpezione delle curve fuggerifce come fi debba procedere nella ricerca di tai punti di regreffo. Dal punto di regreffo B fi cali all' afciffa AP la normale AB, e fi affuma il punto A per origine delle afciffe. E' chiaro 1.° Che a ciafcun afciffa AP prefa da A andando verfo P corrifpondono almeno dentro un certo limite, due ordinate PM, Pm. 2.° Che, prendendo delle afciffe dalla parte oppofta, cioè da B andando verfo p, le ordinate corrifpondenti fono tutte immaginarie, poichè i due rami della curva non oltrepaffano il punto di regreffo B. 3.° Che

all' origine A delle ascisse corrispodono due ordinate eguali, le quali si confondono in una sola. 4.° Che il raggio osculatore in B, perciò che si è detto di sopra (CXXII), deve essere o infinito, o zero. 5.° Che prendendo AP infinitamente piccola i due raggi osculatori a quest' ascissa corrispondenti devono avere segni dissimili, quando il punto di regresso è di prima specie, e segni simili quando questi sia di seconda specie; poichè i due archetti infinitesimi ed infinitamente prossimi al punto di regresso nel 1.° caso volgono i loro concavi da parti opposte, e nel secondo caso li volgono da una stessa parte. 6.° Che i medesimi due raggi osculatori devono indicare la posizione dell' asse rispetto al concavo, od al convesso di ciascun ramo della curva.

Per esempio nella curva dell' equazione $y^2 = x^3$ si hanno due valori di y, cioè $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$, i quali dinotano due rami. Se si prende la x dalla parte de' negativi l' equazione diventa $y^2 = - x^3$, ed i valori di y risultano amendue immaginarj.

Però differenziando la data equazione, ed operando al solito modo, si trova $R = \mp \frac{4}{3} x^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{9}{4} x)^{\frac{3}{2}}$. Si faccia $x = 0$, si avrà $y = 0$, ed $R = 0$. Si faccia $x = 0 + dx$, ossia $x = dx$, ed avrassi di nuovo due valori reali di R con segni dissimili. Dunque i due rami della curva partono dall' origine delle ascisse, dove l' ascissa, l' ordinata, e 'l raggio osculatore sono eguali a zero, formano in questo punto un regresso di prima specie, e rivolgono le loro convessità all' asse. La figura 41 rappresenta questa curva.

Al contrario nella curva dell' equazione $y = a + x^m \pm x^{\frac{r}{n}}$, in cui m è numero intero maggiore dell' unità, ed n numero dispari non minore di 5 i due rami formano un re-

gresso di seconda specie all' origine della curva, dove $x = 0$, ed $y = a$; poichè i raggi osculatori de' due archetti infinitamente prossimi al punto di regresso sono amendue negativi. Questa curva è rappresentata dalla figura 45, in cui i due rami BM, Bm volgono il loro convesso al comun asse AP, e dove all' ascissa $x = 0$ corrisponde l' ordinata $y = AB = a$.

I regressi di ciascuna delle due specie nelle curve riferite ad un foco si trovano appresso a poco allo stesso modo. Ma diciamo due parole intorno ai punti serpentini delle curve.

CXXVII.

Quando una curva ha più punti d' inflessione, l' equazione al zero del numeratore, o del denominatore del raggio osculatore deve dare più valori di x e di y, cioè tanti valori di x, e di y quanti punti d' inflessione si trovano nella curva. Questo succede nelle curve, che vanno serpeggiando come nella figura 47.

Se due di questi punti M, m sono infinitamente vicini la curva sembra non averli, cioè i due flessi contrarj in M ed m non sono visibili nella curva; poichè se per ipotesi la curva prima di giugnere al punto M è concava rispetto ad una retta AB data di posizione, in M diventa convessa, e nel punto m infinitamente prossimo ritorna concava alla stessa AB. Questi punti si chiamano *Punti di flesso invisibile*, ed il punto, in cui essi due punti suppongonsi compenetrati, dicesi *Punto Serpentino di primo ordine*.

CXVIII.

Per conoſcere ſe una curva abbia qualche punto ſerpentino, ſi cerchi col metodo precedente ſe in eſſa vi abbia alcun punto, in cui $R = 0$, oppure $R = \infty$.

Trovato queſto punto nella curva ſi cerchino i raggi oſculatori de' due archetti infiniteſimi, che lo comprendono immediatamente. Se queſti due raggi oſculatori hanno ſegni ſimili, il punto trovato ſarà un punto ſerpentino di primo ordine; poichè i due archetti infiniteſimi, trai quali eſſo giace, volgono i loro concavi da una ſteſſa parte della Curva.

CXXIX.

Se la curva ha tre punti di fleſſo contrario infinitamente proſſimi, due di queſti ſono inviſibili, ed il terzo viſibile, cioè l'infleſſione della curva è viſibile; mentre ſuponendo la curva concava riſpetto ad una retta qualunque il primo punto d' infleſſione la rende conveſſa a queſta retta, il ſecondo punto la fa concava, ed il terzo la rende di nuovo conveſſa.

Se i fleſſi uniti ſono quattro l' infleſſione della curva è inviſibile, poichè dopo il quarto punto la curva è come prima o concava, o conveſſa verſo la ſteſſa parte.

E in generale, ſe il numero dei punti di fleſſo contrario è m, l'infleſſione è viſibile, o inviſibile, ſecondochè m è numero impari, o pari.

Le curve, in cui trovansi varj di questi flessi infinitamente vicini, si chiamano *Serpentine*, ed il punto, in cui essi flessi si suppongono compenetrati, chiamasi ***Punto Serpentino d' ordine superiore.***

FINE.

pag.	lin.	*Errori*	*Correzioni*
11	3	negativo	positivo, negativo
	6	epiponente	esponente
27	5	degli	degli stati
57	8	$\frac{y}{dy}=$	$\frac{y}{dy}$
70	24	que	queste
82	13	questo	questo valore
125	8	$=n\frac{1}{2}a$	$n=\frac{1}{2}a$
136	18	invece	invece di x

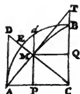
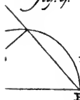


fig. 9.



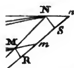




fig. 14.

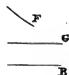


fig. 18.



fig. 23.

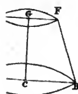
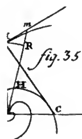


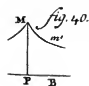


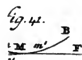


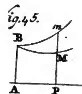
fig. 31.

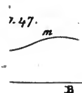



fig. 35
m
R
H
C


fig. 40.
M
m'
P
B


B
M
m'
F


m
B
M
A
P


m
B